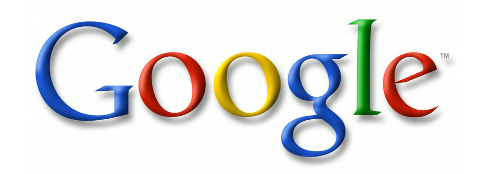
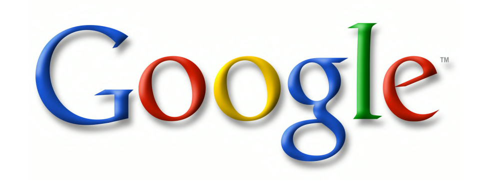
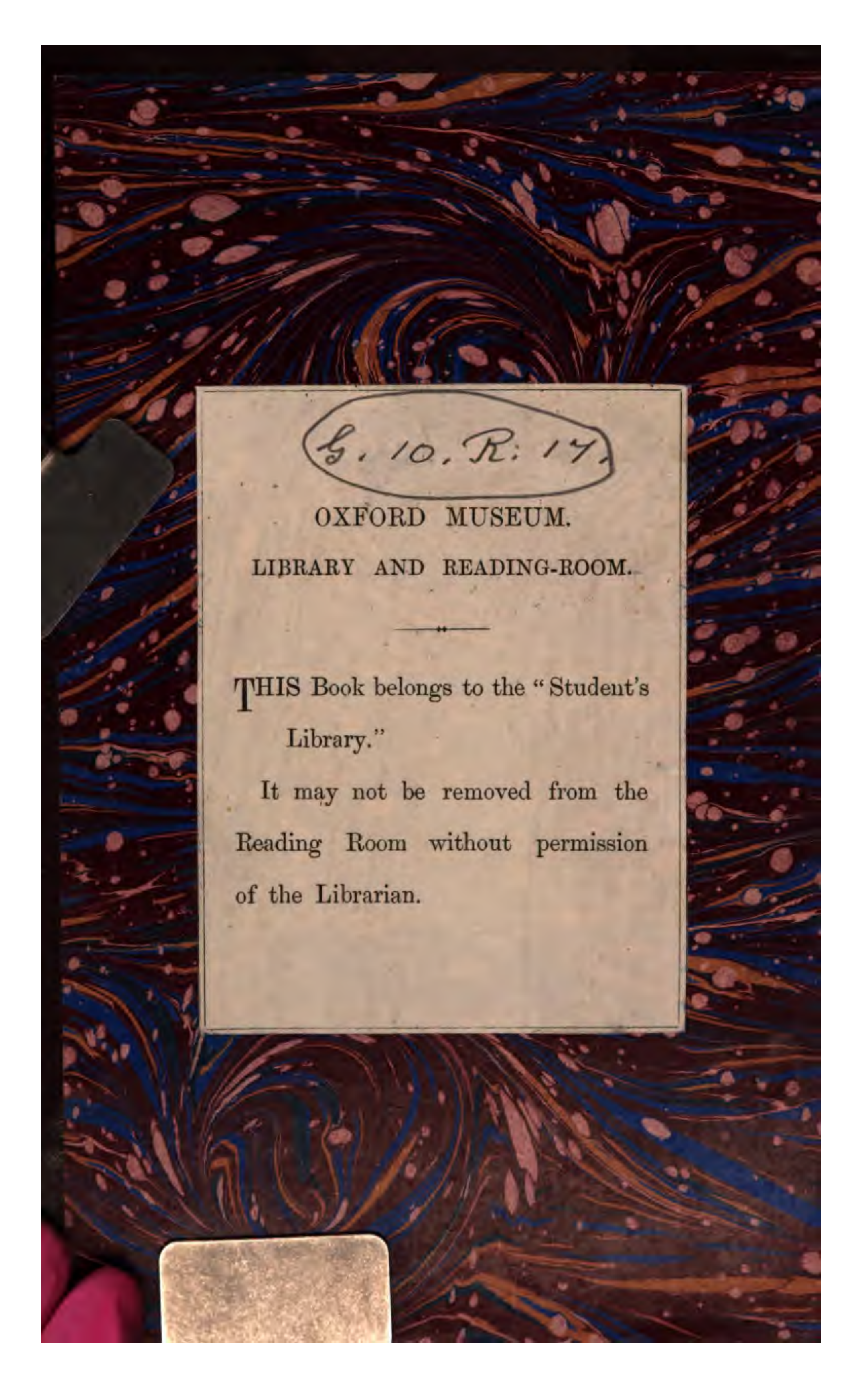








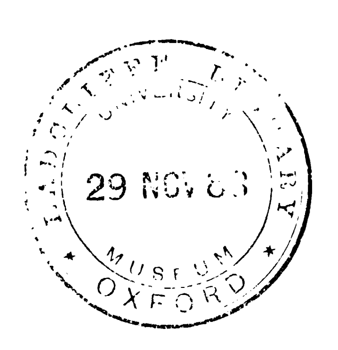



600047118R

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

LENTILLES ÉPAISSES.



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Augustins, 55.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

LENTILLES ÉPAISSES

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

ET

EXPOSITION ANALYTIQUE DES RÉSULTATS DE GAUSS.

PAR M. [Marcel Désiré] CROULLEBOIS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1882

AVANT-PROPOS.

Cet Ouvrage est la reproduction des leçons que je professe à la Faculté des Sciences de Besançon sur une des parties les plus délicates et les moins connues de l'Optique géométrique. La théorie des lentilles, en tenant compte de l'épaisseur, a été successivement exposée et discutée par Biot et par Gauss; mais, tandis que Biot n'arrive à des résultats pratiques que par d'interminables calculs, Gauss s'élève à une hauteur de généralisation qui, de bonne heure, a fixé l'attention sur son célèbre Mémoire. Toutefois, l'analyse de l'illustre physicien de Göttingue est d'une lecture assez pénible et exige des connaissances mathématiques avancées : c'est la raison qui a longtemps retardé la vulgarisation des nouveaux principes. Je pense donc avoir rendu un véritable service à l'enseignement en traitant la matière avec tous ses détails par les voies synthétiques de la pure Géométrie : la théorie de Gauss devient maintenant accessible à tous les élèves des classes de Mathématiques dans nos lycées.

Les Chapitres I, II, V, VI, VII répondent aux programmes d'admission des Écoles Polytechnique et Normale

dans le Chapitre VI, j'ai étendu aux miroirs les procédés de construction qui m'avaient servi pour les lentilles. C'est la partie la plus originale du livre; on y verra démontré qu'un miroir est en tous points l'équivalent d'une lentille, et qu'une association de miroirs sphériques centrés fonctionne comme une association de lentilles sphériques centrées. J'ai été ainsi conduit à donner une expression simple du grossissement dans les télescopes de Grégori et de Cassegrain.

L'ensemble de l'Ouvrage peut aussi être considéré comme une Introduction à l'Optique physiologique. J'ai établi dans toute leur généralité les formules qui définissent les éléments cardinaux d'un système quelconque de lentilles séparées par des milieux différents. J'ai montré l'application immédiate de ces formules à l'œil humain, pour en déduire soit l'œil schématique, soit l'œil réduit. Enfin, à la fin du Chapitre VII, j'ai appris à conjuguer simultanément miroirs et lentilles et à trouver par de simples constructions la grandeur relative des images de Purkinje, soit dans l'état normal, soit dans les diverses phases de l'accommodation.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

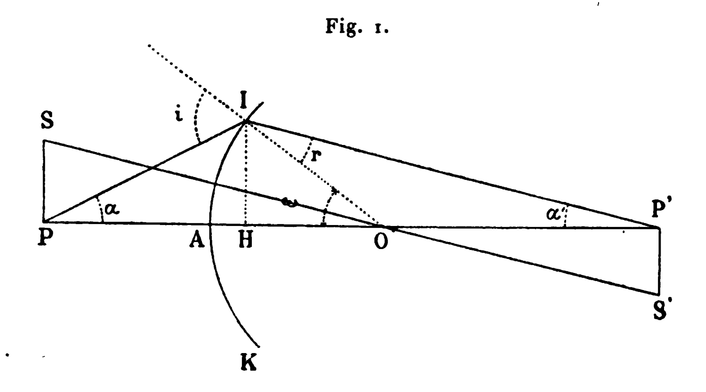
LENTILLES ÉPAISSES.

CHAPITRE I.

RÉFRACTION A TRAVERS UNE SURFACE.

Marche des rayons lumineux. Points ou foyers conjugués. — Soit IAK (*fig.* 1) la section diamétrale d'une calotte sphé-

Fig. 1.



rique dont le centre est en O et qui sépare deux milieux différents ; soient n et n' les indices de réfraction des milieux antérieur et postérieur, et, pour fixer les idées, supposons

$n' > n$. L'*indice relatif* du second milieu par rapport au premier est $\frac{n'}{n}$. Le centre de figure A s'appelle le *sommet* ou le *pôle* de la calotte sphérique, et la droite indéfinie AO, qui passe par ce point et le centre de courbure O, est l'*axe principal*. Un point P placé sur l'axe enverra des rayons dans tous les sens; considérons un de ces rayons PI tombant sur la surface *convexe* et cherchons la direction du rayon réfracté correspondant IP'. A cet effet, menons au point d'incidence I la normale, laquelle se confond avec le rayon OI de la calotte sphérique; puis construisons un angle de réfraction OIP', tel que la relation de Kepler

$$ni = n'r$$

soit satisfaite, i désignant l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction.

Appelons α, α', ω les angles en P, P', O; l'angle i est extérieur au triangle PIO et, par conséquent, est égal à la somme des angles intérieurs. Ainsi

$$i = \alpha + \omega.$$

De même, on a

$$r = \omega - \alpha'.$$

On déduit de ces trois équations, par l'élimination de i et de r,

$$n\alpha + n'\alpha' = (n' - n)\omega.$$

On mesurera les trois angles α, α', ω au moyen des trois longueurs $AP = p$, $AP' = p'$ et $AO = R$; car, si nous abaissons la perpendiculaire IH sur l'axe, nous pourrons écrire, en substituant aux angles leurs tangentes et négligeant la longueur infiniment petite AH,

$$\alpha = \frac{IH}{p}, \quad \alpha' = \frac{IH}{p'}, \quad \omega = \frac{IH}{R},$$

d'où

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = \frac{n' - n}{R}. \tag{1}$$

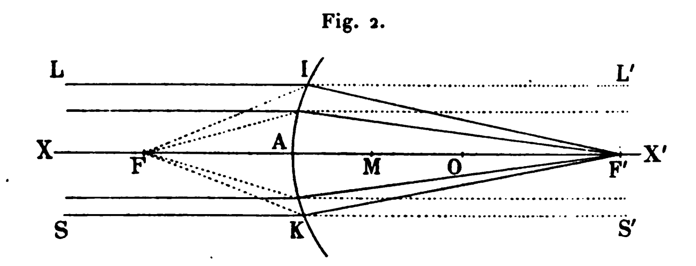
L'équation (1) donne pour p' une valeur indépendante de la direction du rayon incident. On en conclut que tous les rayons partis d'un même point P concourent en un même point P'. Ce qu'on exprime encore en disant que des rayons *homocentriques* qui traversent une surface sphérique réfringente sous des angles d'incidence très petits restent *homocentriques* après la réfraction. Réciproquement, si le point lumineux se trouve dans le milieu le plus réfringent, en P' par exemple, les rayons qui en émanent se réuniront en P; car, en vertu de la loi de réciprocité, la lumière prendra, pour aller de P' en P, la même route que celle qu'elle a suivie pour se rendre de P en P'. Deux points entre lesquels existe une telle relation de réciprocité se nomment *points* ou *foyers conjugués :* ce sont les *images* l'un de l'autre.

Remarque.

L'équation (1) est dite la *formule classique* des foyers conjugués : p et p' sont les distances respectives du pôle A au *point-objet* et au *point-image*. Nous adopterons les conventions de signe suivantes : nous regarderons comme *positives* les distances p comptées à partir du pôle A vers le côté d'où vient la lumière, et comme *négatives* celles portées dans la direction opposée. Au contraire, les valeurs *positives* de p' seront comptées dans le sens de la lumière transmise, et les valeurs *négatives* en sens inverse. Enfin, nous attribuerons au rayon R de la surface réfringente le signe + ou le signe —, selon que cette surface tournera sa convexité ou sa concavité vers les rayons incidents.

Notre formule fait voir que la distance de l'image P′ au pôle A dépend de la distance à ce pôle du point lumineux P. A mesure que celui-ci s'éloigne du pôle, dans le sens AX (*fig.* 2), son conjugué P′, ***marchant dans le même sens,*** s'approche de la surface réfringente. Lorsque le point lumineux a reculé à l'infini, les rayons qui en partent, LI, FA, SK, sont parallèles entre eux et à l'axe principal, et leur point de concours, après la réfraction, est situé en F′.

Fig. 2.



Ce point F′, où viennent se réunir les rayons réfractés correspondant à des rayons incidents parallèles à l'axe principal, s'appelle *foyer principal postérieur* ou *second foyer principal.* Sa distance f' à la surface réfringente est la *seconde longueur focale.* Elle se déduit de la formule (1), pour $p = \infty$; on trouve

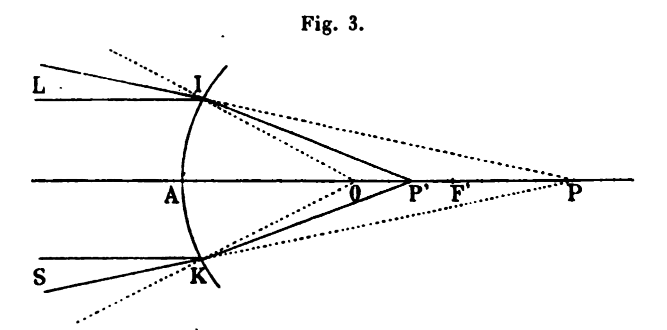
$$f' = \frac{n'R}{n' - n}.$$

Si le faisceau conique incident devient convergent, de telle sorte que les prolongements géométriques des rayons et non les rayons eux-mêmes concourent en un point situé à droite de la surface réfringente, le point lumineux est dit *virtuel* (*fig.* 3). Dans ce cas, l'image P′ est formée par des rayons qui vont toujours réellement s'y réunir; elle est dite ***réelle*** et

parcourt l'intervalle compris entre le foyer principal F′ et le pôle A, pendant que l'objet virtuel P se rapproche de l'infini postérieur jusqu'à la surface. Ces derniers résultats se déduisent de l'équation (1), dans laquelle on attribue à p des valeurs négatives depuis $-\infty$ jusqu'à o.

Supposons, au contraire, que le point lumineux s'avance vers le sommet A; son conjugué s'éloignera de plus en plus dans le sens AX′, jusqu'à ce que finalement il soit à l'infini, ce

Fig. 3.



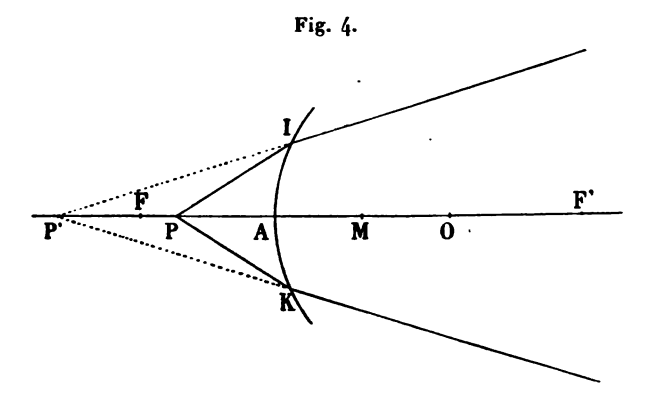
qui arrivera quand le point lumineux occupera, dans le premier milieu, une position déterminée F qui porte le nom de *foyer principal antérieur* ou de *premier foyer principal.* Les rayons réfractés seront alors représentés par les droites pointillées IL′, AF′, KS′ (*fig.* 2), parallèles à l'axe principal. La distance FA s'appelle la *première longueur focale.* Cette longueur f se tire de la formule (1) pour $p' = \infty$; on trouve

$$f = \frac{nR}{n' - n}.$$

Enfin, si le point lumineux se rapproche encore davantage de la surface réfringente, les rayons qui en partent resteront divergents après la réfraction; seulement, comme l'indique la

fig. 4, leur divergence sera moins grande que celle du faisceau incident, et, au lieu de se réunir à droite de la surface IAK pour former une image réelle, ils sembleront partir d'un point situé à gauche de la surface réfringente : l'image sera *virtuelle.* Ainsi, pendant que l'objet s'avance dans le sens AX'

Fig. 4.



depuis le foyer F jusqu'au pôle A, l'image passe du même côté que lui, devient virtuelle et va de l'infini antérieur au pôle. En cet endroit, le point lumineux et son image se confondent.

L'examen de notre formule fondamentale conduit aisément à ces conclusions.

En résumé, *les foyers conjugués marchent toujours dans le même sens.*

Dans la discussion précédente, on a supposé que la lumière incidente venait du milieu antérieur moins réfringent, et que la surface d'entrée était convexe. Mais il est facile de reconnaître que notre formule s'applique à tous les cas possibles, au moyen de deux règles assez simples :

1° *Si les rayons incidents passent du milieu plus réfrin-*

gent dans le milieu moins réfringent, il faut remplacer n' par n, et réciproquement.

2° *Il faut changer le signe de* R *quand la surface de séparation des deux milieux tourne sa concavité vers les rayons incidents.*

On a trouvé plus haut, pour la *première longueur focale*,

$$f = \frac{nR}{n' - n},$$

et, pour la *seconde longueur focale*,

$$f' = \frac{n'R}{n' - n}.$$

Si la lumière passe de l'air dans le milieu le plus réfringent à travers une surface convexe, f et f' sont positifs : les deux *points focaux* F et F' sont *réels*.

Si la lumière passe de l'air dans le milieu le plus réfringent à travers une surface concave, f et f' deviennent négatifs; les deux *points focaux* F et F' sont *virtuels*.

Enfin, si la lumière passe du milieu le plus réfringent dans l'air à travers une surface convexe, les distances focales f et f' sont encore négatives; les deux *points focaux* F et F' sont encore *virtuels*.

Dans tous les cas, on voit que les foyers principaux F et F' sont inégalement distants du sommet A de la surface réfringente. Le rapport de ces longueurs focales est égal à l'indice relatif $\frac{n'}{n}$:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n}.$$

Leur différence est égale au rayon de courbure de la surface :

$$f' - f = R.$$

Donc *les deux foyers principaux sont à égale distance du milieu* M *du rayon de courbure* AO (*fig.* 2).

Si, dans la formule (1), on divise tous les termes par le second membre, on y introduit naturellement les longueurs focales, et l'on obtient ce que nous appellerons la *formule transformée :*

$$(2) \qquad \frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} = 1.$$

Nous avons pris pour origine des distances le pôle A de la surface réfringente. Nous serions tombé sur une formule analogue si nous avions choisi comme origine le centre de courbure O. En effet, posons $OF = \varphi$, $OF' = \varphi'$, $OP = \varpi$, $OP' = \varpi'$; on déduit

$$f = \varphi - R, \quad f' = \varphi' + R, \quad p = \varpi - R, \quad p' = \varpi' + R.$$

L'équation (2) devient alors

$$\frac{\varphi - R}{\varpi - R} + \frac{\varphi' + R}{\varpi' + R} = 1,$$

d'où, après des transformations faciles et observant que $\varphi - \varphi' = R$,

$$\frac{\varphi}{\varpi} + \frac{\varphi'}{\varpi'} = 1.$$

Il est à remarquer que l'on obtient toujours des équations de cette même forme, si simple, en mesurant, à partir d'un point arbitraire S de l'axe (*fig.* 5), les distances du *point-objet* P, et, à partir du conjugué T de S, les distances du *point-image* Q. Pour établir cette démonstration, dans le cas le plus général, il nous faut rappeler les conventions adoptées sur les signes des longueurs géométriques : comptées à partir de l'origine de S; elles sont *positives* dans le sens AX, *néga-*

tives dans le sens AX′; au contraire, comptées à partir de l'origine T, elles sont *positives* dans le sens AX′ et *négatives* dans la direction inverse.

Posons d'abord

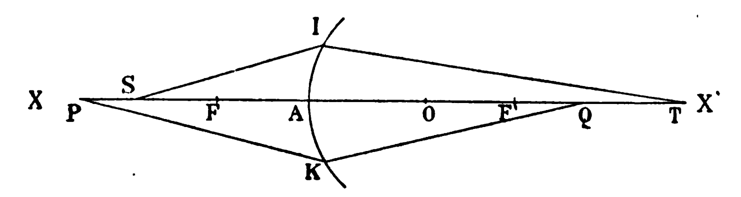
$$AP = p, \quad AQ = q, \quad AS = s, \quad AT = t,$$

puis, d'après la *fig.* 5 et d'après les conventions précédentes,

$$SP = h, \quad TQ = -h', \quad SF = -H, \quad TF' = -H'.$$

Les longueurs H et H′ désignent, en valeur absolue, les dis-

Fig. 5.



tances focales par rapport aux points S et T, choisis comme origines.

On déduit

$$\begin{aligned} h &= AP - AS = p - s, \\ h' &= QA - TA = q - t, \\ H &= FA - SA = f - s, \\ H' &= F'A - TA = f' - q. \end{aligned}$$

D'autre part, on a les deux relations suivantes entre les longueurs p, q, s, t :

$$\frac{f}{p} + \frac{f'}{q} = 1$$

et

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{t} = 1.$$

Dans la première, substituons les valeurs de p et de q tirées des précédentes égalités; il vient

$$\frac{f}{s+h}+\frac{f'}{t+h'}=1,$$

d'où, après développement,

$$f(t+h')+f'(s+h)=(s+h)(t+h')$$

et

$$ft+f's=st.$$

Retranchant membre à membre, il reste

$$(f-s)h'+(f'-t)h=hh',$$

ce qui donne, grâce aux égalités posées plus haut,

$$\frac{H}{h}+\frac{H'}{h'}=1. \qquad (4)$$

Ainsi, *quand on prend pour origines des distances un couple quelconque de points conjugués, on retombe toujours sur la même formule simple.* Au pôle A et au centre de courbure O, l'objet se confond avec son image, et les formules (2) et (3) ne sont, par conséquent, que des cas particuliers de la formule (4).

Si l'on fait coïncider le point S avec le premier foyer principal F, l'équation (4) devient inapplicable, parce que les distances H' et h' deviennent infinies.

Mais prenons pour origines les deux foyers principaux F et F', et, dans la formule (2), posons

$$p=d+f$$

et

$$p'=d'+f';$$

d et d' sont les distances respectives du point lumineux et de son image aux foyers correspondants. Nous obtenons alors la forme la plus simple sous laquelle on puisse exprimer la loi de position des images, c'est-à-dire

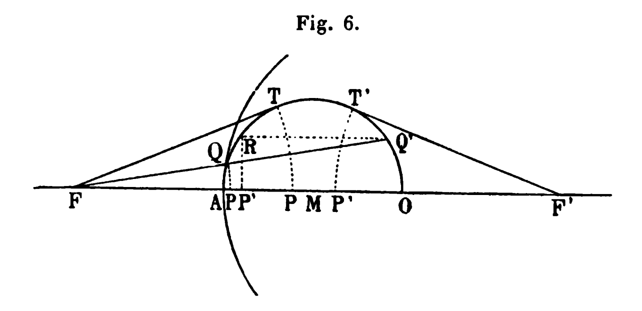
$$(5) \qquad dd' = ff'.$$

C'est la formule simplifiée ou formule de Newton.

Nous avons utilisé la formule classique pour la discussion des positions relatives des deux points conjugués P et P′. La formule transformée et la formule simplifiée auraient fourni, par une discussion aussi rapide, les mêmes résultats, et c'est un soin que nous laissons au lecteur. Mais l'équation de Newton, se prêtant à une construction graphique très simple, permet d'étudier directement les déplacements relatifs de P et de P′ dans le voisinage du centre de courbure.

A cet effet, sur AO comme diamètre, décrivons une demi-

Fig. 6.



circonférence (*fig.* 6); du premier foyer principal F, menons à cette circonférence une tangente FT : on aura

$$\overline{FT}^2 = FA \times FO = f(f + R) = ff'.$$

Cela posé, prenons sur l'axe principal et derrière la surface un point P dont nous voulons avoir l'image; décrivons l'arc

de cercle PQ ayant son centre en F, puis traçons la ligne FQ jusqu'en Q′ : nous aurons

$$FQ \times FQ' = \overline{FT}^2 = ff',$$

et comme, par hypothèse, $FQ = d$, FQ′ doit être égal à d'. Ainsi, comme d et d' sont négatifs dans le cas actuel, d'après nos conventions, il faudra porter FQ′ de F′ en P′, en sens contraire de FP, ce qui se fera graphiquement en menant Q′R parallèle à l'axe principal et rabattant R en P′.

Imaginons une telle construction effectuée pour toutes les positions du point P entre le pôle et le centre de courbure. On voit que les points P et P′ se superposent d'abord en A, puis P′ s'éloigne rapidement de P, qui s'avance lentement vers la droite. L'écart devient maximum pour

$$d = FT = d' = F'T' = \sqrt{ff'},$$

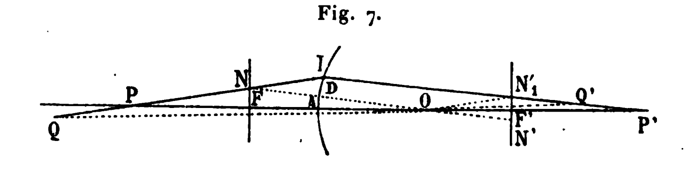
et les deux points conjugués sont à égale distance de part et d'autre du centre M. A partir de là, comme P se déplace plus rapidement que P′, l'écart PP′ décroît très vite et les deux points conjugués se confondent de nouveau en O.

Plans conjugués. — Un point S (*fig.* 1), pris en dehors de l'axe principal, est par rapport à la surface dans les mêmes conditions que le point P ; l'image S′ se fait sur la droite OS, qui est un rayon de la sphère tout comme OP et les distances respectives de ces deux points conjugués S et S′ à la surface réfringente sont liées entre elles par la même loi que celle qui détermine les positions relatives des foyers conjugués sur l'axe principal. Si $OS = OP$, on aura de même $OS' = OP'$. Donc tous les points d'une calotte sphérique, dont le rayon est OS, ont pour conjugués les points d'une seconde calotte sphérique

dont le rayon est OS′. Ces deux calottes ont même axe OA, et, comme elles ont par hypothèse une faible ouverture, elles se confondent avec leurs plans tangents, qui sont perpendiculaires à l'axe principal aux points P et P′. D'après cela, tout point de l'un de ces plans a son conjugué ou son image dans le second, sur une ligne, appelée *axe secondaire* ou *ligne de direction,* qui passe par le centre de courbure de la surface. Les images d'objets couchés dans ces plans sont semblables et leur centre de similitude est en O. Les plans, menés ainsi perpendiculairement à l'axe principal par les points conjugués, ont reçu la dénomination de *plans conjugués.*

Plans focaux. — De même qu'il y a des plans conjugués, il y a des plans focaux. Élevons au premier point focal F (*fig.* 7) un plan FN perpendiculaire à l'axe principal; nous aurons le premier *plan focal.* Si nous ne considérons que les parties

Fig. 7.



voisines de F, ce plan jouit d'une propriété importante : *tout point lumineux* N *qui y est contenu enverra sur la surface réfringente des rayons qui, après la réfraction, se propageront dans le second milieu, parallèlement à l'axe secondaire* ON *relatif au point considéré.* En effet, cette droite joue évidemment le rôle d'un axe principal, et, comme ND est sensiblement égal à FA, N occupe la position d'un premier foyer principal.

D'autre part, élevons au deuxième point focal F′ un plan

F′N′ perpendiculaire à l'axe principal; ce sera le *second plan focal. Il renfermera l'ensemble,* ou, comme on dit, *sera le lieu des foyers principaux relatifs aux diverses directions des axes secondaires, peu inclinés toutefois sur l'axe principal.* En effet, considérons le point N′, très voisin de F′; l'axe secondaire ON′ a les mêmes propriétés qu'un axe principal, et, comme N′D est très sensiblement égal à F′A, N′ joue le rôle d'un second foyer principal.

Construction des rayons conjugués. — Les propriétés des plans focaux sont utiles à connaître, car elles nous permettent de construire le rayon réfracté correspondant à un rayon incident quelconque, et en particulier de déterminer géométriquement la position du foyer conjugué d'un point lumineux situé sur l'axe principal.

Soit, par exemple, le rayon incident PI (*fig.* 7); il s'agit de trouver le rayon réfracté correspondant. Graphiquement, on aura *deux* moyens :

1° Le rayon PI coupe le premier plan focal en N. On peut regarder ce rayon comme appartenant à un cône dont le sommet est en N; or, nous savons que tout rayon issu d'un point du premier plan focal prend, en se réfractant, une direction parallèle à l'axe secondaire de ce point. Il suffit donc de tracer cet axe secondaire NO et de lui mener par le point d'incidence I une parallèle IP′ : cette dernière droite est le rayon réfracté cherché.

2° Traçons l'axe secondaire parallèle au rayon incident PI; soit N'_1 le point d'intersection de cet axe avec le second plan focal; N'_1 est, d'après la définition de ce dernier plan, le foyer où viennent se réunir après la réfraction les rayons incidents parallèles à ON'_1. Donc, en joignant IN'_1, nous

obtenons le rayon réfracté correspondant au rayon incident PI.

Le quadrilatère NIN'_1O, formé par les deux axes secondaires NO, ON'_1, par le rayon incident et le rayon réfracté, est un parallélogramme.

Le point lumineux P, d'où part le rayon incident PI, aura évidemment pour conjugué le point P′, où le rayon réfracté IP′ coupe l'axe principal.

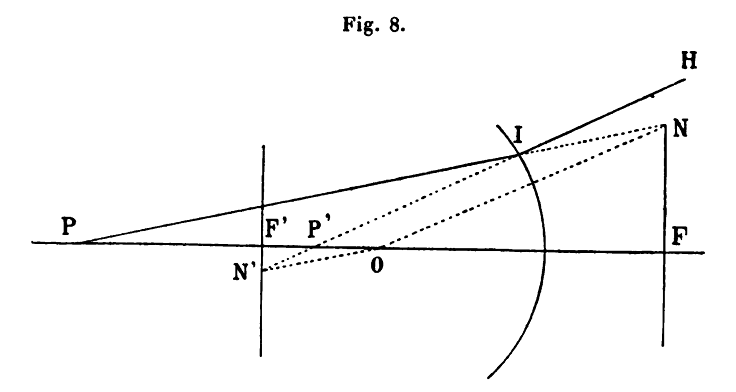
Les deux constructions précédentes s'appliquent aussi bien au cas où le point est hors de l'axe : ainsi l'image de Q est en Q′ sur l'axe secondaire QO.

Pour familiariser le lecteur avec ces tracés graphiques, proposons-nous l'exercice suivant :

Construire le rayon réfracté, lorsque le rayon incident passe de l'air dans le milieu le plus réfringent à travers une surface concave (*fig.* 8).

Dans ce cas, on sait que les deux foyers principaux F et F′

Fig. 8.



sont virtuels : le premier est situé du côté de la lumière transmise, et le second du côté de la lumière incidente. Soient

FN, F′N′ le premier et le second plan focal et PI un rayon incident.

1° Le rayon PI prolongé coupe le premier plan focal en N. Or, tout rayon issu *virtuellement* ou *réellement* d'un point du premier plan focal se réfracte parallèlement à l'axe secondaire de ce point. Donc, tirons l'axe secondaire NO et menons IHP′ parallèle à NO; IHP′ est le rayon réfracté et P′ le conjugué *virtuel* de P.

2° Tirons l'axe secondaire ON′ parallèle à PI et coupant le second plan focal en N′; ON′ joue évidemment, par rapport à PI, le rôle d'un axe principal; donc N′ est le point où se réunissent après la réfraction les rayons incidents parallèles à ON′; en joignant IN′, on a le rayon réfracté IH.

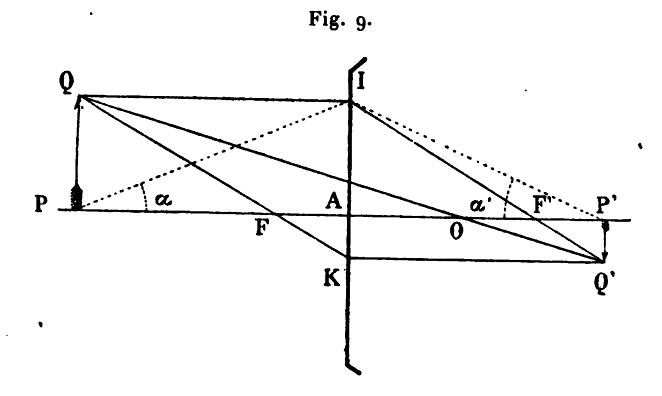
Construction des images. — Pour construire l'image d'un objet, il suffit de construire l'image de ses différents points. On vient de voir comment s'obtient l'image d'un point situé sur l'axe principal ou en dehors de cet axe. Les explications précédentes conduiraient donc immédiatement au tracé graphique de l'image d'un objet quelconque et dans les circonstances les plus générales. Toutefois, il nous paraît utile d'indiquer cette autre manière de construire l'image d'un point lumineux placé en dehors de l'axe principal.

Avant de poursuivre l'exposition, je ferai remarquer, une fois pour toutes, que les surfaces sphériques étant remplacées par leurs plans tangents, nous ne les figurerons plus courbes, et nous les représenterons dorénavant par une simple ligne droite (*fig.* 9).

Soit donc IAK la surface réfringente dont les points focaux sont F et F′, et soit Q un point hors de l'axe. Menons le rayon incident QI parallèle à l'axe principal; le rayon réfracté cor-

respondant IF′ doit passer par le second point focal F′. Joignons ensuite le point Q au premier point focal F; le rayon QF rencontre la surface réfringente en K et se réfracte parallèlement à l'axe principal suivant KQ′. Les deux rayons réfractés IQ′ et KQ′ se coupent en Q′, et nous savons que tous

Fig. 9.



les autres s'y coupent. Donc Q′ est l'image ou le conjugué de Q.

L'axe secondaire QO, relatif au point Q, doit aussi passer par l'image Q′; de là évidemment *deux* autres manières de déterminer ce dernier point.

Enfin, d'après la propriété des plans conjugués, si l'on prend pour objet la flèche PQ perpendiculaire à l'axe principal, son image aura la même direction et s'obtiendra en menant P′Q perpendiculaire à l'axe PP′.

Grandeur de l'image. — Posons $PQ = O$, $P'Q' = I$; à gauche, les triangles semblables FAK, QIK donnent (*fig.* 9)

$$\frac{AK}{IK} = \frac{FA}{QI} \quad \text{ou} \quad \frac{P'Q'}{PQ + P'Q'} = \frac{FA}{PA},$$

et, d'après les notations adoptées,

$$\frac{I}{I+O}=\frac{f}{p}; \tag{6}$$

à droite, les triangles semblables F'AI, Q'KI donnent pareillement

$$\frac{O}{I+O}=\frac{f'}{p'}, \tag{7}$$

d'où, en additionnant membre à membre,

$$\frac{f}{p}+\frac{f'}{p'}=1.$$

On retombe ainsi sur la *formule transformée*.

On retrouverait la *formule simplifiée* en considérant, à gauche, les deux triangles semblables PFQ, FAK, et, à droite, les deux autres F'AI, P'F'Q'. La proportionnalité des côtés homologues donnerait

$$\frac{I}{O}=\frac{d}{f}=\frac{f'}{d'}, \tag{8}$$

d'où

$$ff'=dd'.$$

C'est l'*équation de Newton*.

En comparant les égalités (6) et (7), on obtient une autre expression du rapport entre la grandeur I de l'image et la grandeur O de l'objet,

$$\frac{I}{O}=\frac{f}{p}:\frac{f'}{p'} \tag{9}$$

ou encore

$$O\frac{f}{p}=I\frac{f'}{p'}.$$

Les égalités (8) et (9) donnent une valeur très simple du

grossissement linéaire produit par une seule surface réfringente.

Il ne me paraît pas inutile de donner ici une relation entre la grandeur des images et la convergence des rayons.

Soient α et α' les angles que forment avec l'axe principal le rayon incident et son réfracté. On a, d'après la figure,

$$\frac{p}{\tang \alpha'} = \frac{p'}{\tang_{\text{I}} \alpha}.$$

On a trouvé plus haut

$$\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'},$$

ce qui, transporté dans la formule (9), donne

$$n\text{O} \tang \alpha = n'\text{I} \tang \alpha'.$$

Cette équation exprime une loi importante, *qui lie la grandeur des images à la divergence des rayons, indépendamment de la distance de l'objet et du rayon de courbure de la surface réfringente.*

Elle est due à Helmholtz ([1]).

Nous avons dit plus haut que l'image de chaque point de l'objet se trouve dans le plan conjugué et sur la ligne joignant ce point au centre de la sphère, qui est ainsi un *centre de similitude.* Si donc l'image et l'objet sont de part et d'autre du centre, l'image sera *renversée;* elle sera *droite* dans le cas contraire.

D'après cela, tout objet placé au delà du premier point focal donne une image réelle et renversée (*fig.* 9), située de l'autre côté de la surface réfringente. En particulier, quand l'objet

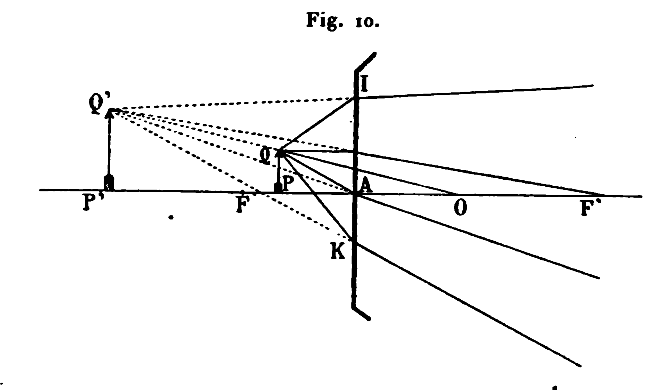
---

([1]) Helmholtz, *Optique physiologique,* traduction Javal, p. 70.

est à une distance double de la première longueur focale, l'image lui est égale en grandeur : ce fait est une conséquence de la formule (2) et de la relation (9). Car, dans la première, introduisons l'hypothèse $p = 2f$: on déduit $p' = 2f'$, et par suite on a $I = O$. Au delà de cette position privilégiée, l'image est plus petite que l'objet; en deçà, elle devient plus grande.

Enfin, lorsque l'objet est situé entre le premier foyer et la

Fig. 10.



surface, l'image est *virtuelle droite* et toujours *plus grande que l'objet*. La *fig.* 10 explique la construction relative à ce dernier cas.

Remarque I.

Quand la surface réfringente devient plane, le rayon de courbure est infini et l'équation (1) se réduit à

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = 0,$$

d'où

$$p' = -\frac{n'}{n} p.$$

L'image et l'objet se trouvent du même côté de la surface

réfringente, mais à une distance différente. En outre, l'image est de même grandeur que l'objet; on peut le reconnaître géométriquement ou le déduire de la formule (9), dans laquelle on remplace les rapports $\frac{f}{f'}$ par $\frac{n}{n'}$ et $\frac{p'}{p}$ par $-\frac{n'}{n}$. On arrive à

$$\frac{I}{O} = -1.$$

Le signe — indique que l'image *virtuelle* est *droite.*

Remarque II.

L'étude que nous venons de faire de l'action d'une surface sphérique sur un faisceau de rayons homocentriques s'applique aussi bien au cas de la réflexion qu'à celui de la réfraction : les raisonnements, constructions et relations sont analogues. Dans nos résultats précédents, il suffit de poser $n' = -n$; on aura ceux qui conviennent aux miroirs.

Du reste, nous établirons plus loin le parallélisme de ces deux théories de la formation des images par réfraction et par réflexion.

CHAPITRE II.

RÉFRACTION A TRAVERS DEUX SURFACES COURBES. LENTILLES.

La lumière suit une route plus compliquée, quand, au lieu de rencontrer sur son passage une seule surface réfringente, elle traverse plusieurs milieux transparents séparés les uns des autres par des surfaces courbes. Nous supposerons que les centres de toutes ces surfaces se trouvent sur une même ligne droite qu'on appelle l'*axe optique principal* du système. Les systèmes de surfaces dans lesquels cette condition est remplie sont dits *centrés.*

Considérons d'abord le cas le plus simple, réalisé par deux surfaces sphériques placées en regard l'une de l'autre et très rapprochées. Un milieu transparent ainsi délimité par ces surfaces s'appelle *lentille sphérique.* En combinant des surfaces sphériques entre elles ou avec des surfaces planes, on obtient six espèces de lentilles, qui sont représentées en coupe dans les figures suivantes.

Ces diverses espèces de lentilles se divisent en deux groupes:

Les lentilles *convergentes;*

Les lentilles *divergentes.*

PREMIER GROUPE. — **Lentilles convergentes.**

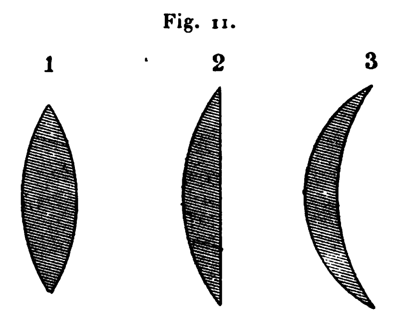
Ce groupe comprend :

1° La lentille *biconvexe,* dont les deux faces sont convexes et ont des courbures égales ou inégales;

2° La lentille *plan-convexe,* dont l'une des faces est plane et l'autre convexe ;

3° Le *ménisque convergent,* dont l'une des faces est con-

Fig. 11.



Formes diverses des lentilles convergentes.

vexe et l'autre concave, mais d'une courbure *en général* moindre.

Les lentilles de ce groupe se reconnaissent *pratiquement* [1] en ce qu'elles sont plus épaisses au centre que sur les bords. Elles possèdent, comme on le verra, la propriété d'augmenter la convergence des rayons lumineux et d'avoir, par suite, des foyers où les rayons se réunissent réellement, c'est-à-dire des foyers *réels.*

Deuxième groupe. — **Lentilles divergentes.**

Ce groupe comprend :

1° La lentille *biconcave,* dont les deux faces sont concaves et ont des courbures égales ou inégales ;

2° La lentille *plan-concave,* dont l'une des faces est plane et l'autre concave ;

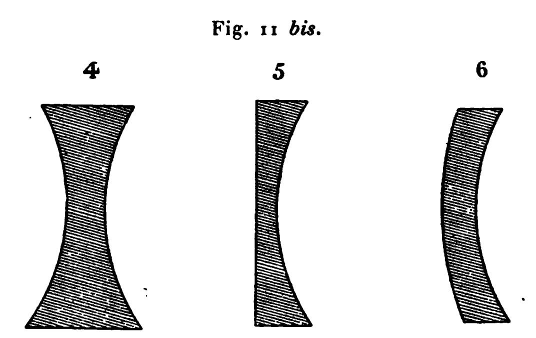
---

(1) Il y a une restriction que nous introduirons plus tard au sujet du ménisque convergent et divergent.

3° Le *ménisque divergent,* dont l'une des faces est convexe et l'autre concave, mais d'une plus forte courbure.

En général, les lentilles de ce groupe sont plus épaisses aux bords qu'au centre. Elles jouissent de la propriété d'augmenter la divergence des rayons, qui ne se coupent pas réellement; leurs prolongements géométriques seuls se rencontrent en des foyers *virtuels.*

Fig. 11 *bis.*



Formes diverses des lentilles sphériques divergentes.

Dès le début, pour plus de généralité, nous supposerons que les surfaces terminales de la lentille servent de séparation à trois milieux d'indices différents, n_1, n_2, n_3. Ces lettres désignent les indices de réfraction du premier milieu, dans lequel se meut la lumière incidente, de la substance de la lentille et du dernier milieu dans lequel émerge la lumière.

Pour fixer les idées, nous supposerons, en outre, n_2 plus grand que n_1 et que n_3 : ce sera, par exemple, une lentille de verre placée entre l'air et l'eau.

Points conjugués. — Nous avons vu, dans le Chapitre précédent, que la réfraction par une seule surface sphérique transforme un cône de rayons émanant réellement ou virtuel-

lement d'un point lumineux P en un second cône dont les rayons convergent réellement ou virtuellement en un autre point P′, appelé le *conjugué* ou l'*image* de P. La réfraction a-t-elle lieu par une seconde surface sphérique, le point P′ a, par rapport à cette surface, un point conjugué P″ qui est l'image de P′ et par conséquent de P. Ainsi, des rayons *homocentriques* qui pénètrent dans le système optique, en faisant de petits angles d'incidence avec son axe, restent *homocentriques* après chaque réfraction et sortent homocentriquement de la dernière surface réfringente. Les sommets de ces cônes successifs sont *points conjugués* les uns des autres.

Points focaux. — Il y a aussi des points focaux. Si le point P, placé sur l'axe de la lentille, dans le premier milieu, s'éloigne à l'infini, le point P″ tend vers un point limite F′ qui est le *second point focal* de la lentille. Inversement, si le point P″ s'éloigne à l'infini dans le troisième milieu, son conjugué P tend vers un point limite F qui est le *premier point focal.*

Il est facile de concevoir *a priori,* et indépendamment de l'expérience, l'existence nécessaire de ces points focaux. En effet, on peut toujours trouver sur l'axe un point tel que son conjugué, par rapport à la première surface, soit précisément en coïncidence avec le premier point focal de la seconde surface. De même, si l'on fait passer le point lumineux de l'autre côté de la lentille, il sera possible d'assigner la position d'un point tel que son conjugué, par rapport à la seconde surface, soit second point focal de la première. Dans les deux cas, les rayons définitivement réfractés se propageront parallèlement à l'axe.

Plans conjugués. — Quand la lumière incidente émane

d'une série de points, qui sont tous situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe optique, nous savons que, après la première réfraction, les points conjugués se trouvent de nouveau tous dans un même plan perpendiculaire à l'axe, et que leur distribution est géométriquement semblable à celle des premiers points lumineux. Il en sera par conséquent de même après chacune des réfractions suivantes, et la dernière image sera aussi géométriquement semblable à la première et placée dans un plan perpendiculaire à l'axe optique. Le plan de l'objet et celui de l'image extrême sont dits *plans conjugués*.

Plans focaux. — Considérons un plan mené par le premier point focal de la lentille, perpendiculairement à l'axe. Chacun de ses points aura son conjugué dans le premier plan focal de la seconde surface, et l'on sait que tous les rayons qui émanent de ce conjugué sortent parallèlement entre eux. D'après cela, *le premier plan focal est le lieu des points où se croisent les rayons incidents qui donnent à l'émergence des rayons parallèles*.

On reconnaîtrait, de la même manière, que le plan mené perpendiculairement à l'axe par le *second point focal* de la lentille, c'est-à-dire le *second plan focal,* est le lieu des points où se croisent les rayons émergents qui proviennent de rayons incidents parallèles, de diverses directions peu inclinées sur l'axe principal.

Plans principaux. — Pour le cas d'une surface réfringente unique, nous avons vu que, dans les limites d'approximation admises, le rayon incident et le rayon réfracté pouvaient être considérés comme coupant en un même point, I ou K, le plan

IAK mené perpendiculairement à l'axe par le sommet A de la surface réfringente : cela nous donnait un point du rayon réfracté, et il suffisait d'en chercher un second pour le déterminer complètement.

Fig. 12.

Lorsque le rayon traverse deux ou un plus grand nombre de surfaces réfringentes, on ne peut avoir un plan unique doué de la même propriété. Mais Gauss a démontré l'existence de deux plans, tout à fait caractéristiques, qu'il a appelés *plans principaux* et qui jouent un rôle analogue à celui du plan tangent au pôle de la surface sphérique. Effectivement, ainsi que nous allons le reconnaître, *les plans principaux sont perpendiculaires à l'axe du système réfringent, et ils sont rencontrés à la même distance et du même côté de l'axe, le premier par le rayon incident, le second par le rayon émergent.*

Nous établirons, par un raisonnement géométrique très simple, et l'existence et les

propriétés de ces plans. Pour fixer les idées, nous supposerons la lentille *biconvexe*.

Soient A et B (*fig.* 12) les deux surfaces terminales de la lentille, F_1 et F'_1 le premier et le second point focal de la première surface A, F_2 et F'_2 le premier et le second point focal de la seconde surface B. Traçons une droite indéfinie SS′ parallèle à l'axe principal, qui perce les deux faces de la lentille en I et en I′. Si SI est un rayon incident, le rayon réfracté correspondant IF'_1 passe par le point F'_1, qui est le second point focal de la surface A. Si S′I′ est un rayon incident, il se réfracte suivant $I'F_2$, passant par le premier point focal F_2 de la face B. Du point K, intersection de ces deux rayons réfractés IF'_1 et $I'F_2$, abaissons la perpendiculaire KO sur l'axe principal : je dis que le point O est le même pour tous les rayons parallèles à l'axe.

En effet, il résulte de la construction que les deux triangles IAF'_1 et KOF'_1 sont semblables et donnent l'égalité de rapports

$$\frac{IA}{KO} = \frac{AF'_1}{OF'_1}.$$

Les deux autres triangles $I'BF_2$ et KOF_2 sont aussi semblables et fournissent pareillement

$$\frac{I'B \text{ ou } IA}{KO} = \frac{BF_2}{OF_2}.$$

Donc

$$\frac{OF_2}{OF'_1} = \frac{BF_2}{AF'_1}.$$

Or les pôles A et B des deux surfaces ainsi que les foyers F_2 et F'_1 sont des points fixes : les longueurs BF_2 et AF'_1 sont donc constantes et, par suite, le point O occupe une position

invariable sur l'axe, quels que soient les points où le rayon incident SS′ perce les deux surfaces A et B.

Actuellement regardons la perpendiculaire KO comme une ligne lumineuse fixe, et, en particulier, cherchons l'image du point K, d'abord à travers la face A, puis à travers la face B. Le rayon KI prolongé passe par le foyer principal F'_1 et, par conséquent, émerge suivant IS parallèle à l'axe principal; un autre rayon KV, parallèle à l'axe principal, émerge en se réfractant suivant VF_1, qui passe par le foyer principal F_1. L'image de K, vue à travers la face A, est donc en H au point d'intersection des prolongements de ces deux rayons émergents. Par une construction identique, on reconnaît que l'image de K, vue à travers la face B, est en H′, au point d'entrecroisement des prolongements géométriques des deux rayons réfractés I′S′ et $V'F'_2$. Abaissons HR et H′R′ perpendiculaires sur l'axe principal; d'après la propriété des plans conjugués, relatifs à une seule surface réfringente, HR est l'image de la ligne lumineuse KO à travers la face A et H′R′ l'image de la même droite à travers la face B. Ainsi un faisceau de lumière incidente qui converge en H se transforme dans la lentille en un faisceau de rayons qui convergent en K; leurs prolongements forment un second cône qui diverge du point K et qui sort de la lentille en divergeant du point H′. Les points H et H′ sont donc images l'un de l'autre à travers la lentille tout entière et ils sont situés du même côté et à égale distance de l'axe. Si H est un point du rayon incident, H′ est un point du rayon émergent correspondant. Cette relation a lieu évidemment entre deux points quelconques pris sur les perpendiculaires HR et H′R′ du même côté et à la même distance de l'axe principal. Enfin, que l'on conçoive deux plans menés par R et R′ perpendiculairement à l'axe, il

est clair que, pour raison de symétrie, ils seront percés, le premier par le rayon incident, le second par le rayon émergent, en deux points situés sur une même parallèle à l'axe principal.

Ces deux plans s'appellent *plans principaux;* HR s'appelle *premier plan principal* et H′R′ *second plan principal.* Chacun d'eux est l'image optique de l'autre; *ce sont même les deux seules images conjuguées qui aient la même grandeur et la même direction* (1). Les points R et R′ où ils coupent l'axe principal se nomment *premier point principal* et *second point principal.* Quand on connaît la position des points principaux R et R′, il est facile de déterminer géométriquement la position des deux points focaux F et F′.

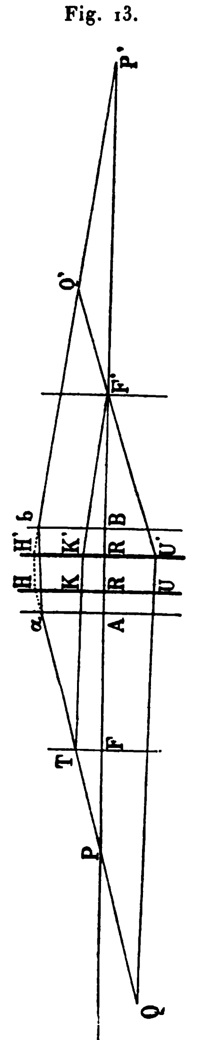
Soit (*fig.* 12) un rayon incident SI parallèle à l'axe; il se réfracte suivant IF'_1 et rencontre en J′ la seconde surface B. Le point J appartient évidemment au rayon émergent; d'ailleurs le rayon incident perce le second plan principal en H′, qui se trouve nécessairement aussi sur la direction du rayon émergent. Le rayon définitivement réfracté est donc H′J′F′ : F′ est le second point focal. On trouverait de la même manière le premier point focal en traçant HJF.

Construction des rayons conjugués. — Soit PH un rayon incident quelconque (*fig.* 13); il s'agit de tracer son conjugué. Le rayon PH coupe le plan focal antérieur en T et le premier plan principal en H. Le point T étant dans le plan focal, tous les rayons qui en émanent sortent de la lentille parallèles entre eux. Or il y en a un, TK′, qui, étant parallèle à l'axe, se

(1) On peut aussi s'appuyer sur cette propriété pour rechercher directement la position des plans principaux.

réfracte suivant K′F′, passant par le second point focal F′ de la lentille. Donc le rayon incident PH se réfractera parallèlement à K′F′. Le point H ayant pour conjugué H′, le rayon conjugué de PH s'obtiendra en menant par H′ une parallèle H′P′ à K′F′.

Fig. 13.



Un point lumineux P, situé sur l'axe, aura évidemment pour conjugué le point P′, où le rayon réfracté H′P′ coupe le rayon central qui a passé sans déviation. Si le point considéré est hors de l'axe, tel que Q, après avoir tracé H′P′ comme nous l'avons indiqué, on mènera le rayon QUU′ parallèle à l'axe; il se réfractera suivant U′F′, passant par le point focal F′. L'intersection Q′ des deux droites H′P′ et U′F′ est l'image de Q.

Il faut remarquer que nous n'avons là, aux alentours des plans principaux, que des lignes de construction. Soient *a* et *b* les points où les rayons incident et émergent coupent les faces terminales A et B; la vraie route du rayon, sa marche réelle, physique est P*ab*P′.

Construction des images. — S'il s'agit d'un point Q placé hors de l'axe, il suffit, pour obtenir son image, de recourir à deux conjugués spéciaux (*fig.* 14).

Menons le rayon QH′ parallèle à l'axe et tirons son conjugué H′F′ passant par le second foyer F′; me-

nons également le rayon QFU passant par le premier foyer et tirons son conjugué UQ′ parallèle à l'axe. Les deux rayons réfractés se coupent en Q′, qui est l'image de Q.

Fig. 14.

Si l'objet est linéaire et perpendiculaire à l'axe, tel que la flèche PQ, l'image P′Q′ est linéaire et aussi perpendiculaire à l'axe.

Équation des points conjugués. — Comptons désormais les distances à partir des points principaux R et R′ *et non plus à partir des pôles* A *et* B, tout en maintenant les conventions faites sur les signes qu'il faut attribuer à ces distances. En conséquence, appelons f et f' les longueurs focales RF et R′F′, p et p' les distances PR et P′R′ des points conjugués P et P′; puis désignons par O et I les dimensions linéaires correspondantes de l'image et de l'objet. Dans la *fig.* 14, les triangles semblables, à gauche FRU et QHU, donnent

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+\mathrm{O}}=\frac{f}{p};$$

à droite, les triangles semblables F′R′H′ et Q′H′U′ donnent également

$$\frac{\mathrm{O}}{\mathrm{I}+\mathrm{O}}=\frac{f'}{p'}.$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$\frac{f}{p}+\frac{f'}{p'}=1\,;$$

c'est une équation identique à celle que nous avons obtenue pour une seule surface réfringente. Nous avons pris ici pour origine des distances les deux points principaux R et R'; mais on démontrerait aisément que, lorsqu'on prend pour origines un couple quelconque de points conjugués, on retombe toujours sur la même formule simple ([1]).

D'autre part, si nous comparons les triangles QFP et FUR qui ont leur sommet en F, puis les triangles Q'F'P' et F'H'R' qui ont leur sommet en F', on aura, en posant $FP=d$ et $F'P'=d'$,

$$\frac{I}{O}=\frac{f}{d}=\frac{d'}{f'},$$

d'où

$$dd'=ff',$$

seconde forme de l'équation des points conjugués, dite *équation de Newton,* déjà trouvée au Chapitre I.

Grandeur des images. — Nous avons obtenu plus haut les deux relations

$$\frac{I}{I+O}=\frac{f}{p}$$

et

$$\frac{O}{I+O}=\frac{f'}{p'};$$

([1]) Il suffit de se reporter au Chapitre I.

divisons-les membre à membre, nous aurons

$$\frac{I}{O} = \frac{f}{p} : \frac{f'}{p'},$$

d'où

$$O\frac{f}{p} = I\frac{f'}{p'},$$

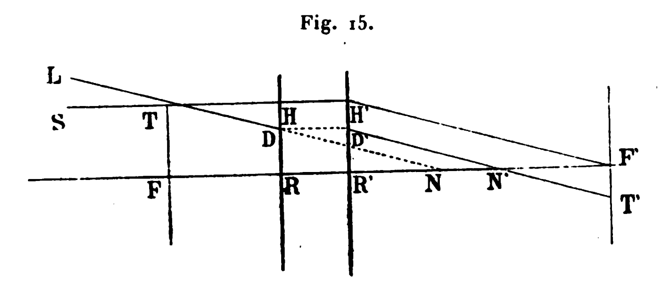
équation déjà rencontrée au Chapitre I.

Points nodaux. — Dans le cas d'une surface réfringente unique, nous avons vu qu'un rayon passant par le centre de courbure ne subissait pas de déviation : cela nous donnait immédiatement la direction d'un rayon réfracté, et il suffisait d'en tracer un second pour déterminer l'image d'un point. Nous avons appelé le centre de courbure *centre de similitude;* il serait tout aussi juste de l'appeler *point nodal* ou *nœud,* puisque c'est par ce point que défilent tous les axes secondaires qu'il y a lieu de considérer. Lorsque la lumière traverse deux ou un plus grand nombre de surfaces réfringentes, on ne peut avoir un point unique doué de la même propriété. Mais un physiologiste allemand, M. Listing, collègue de Gauss à l'Université de Göttingue, a reconnu l'existence de deux points singuliers, jouant un rôle analogue au centre de courbure d'une surface sphérique, et qu'il a appelés *points nodaux* (*Knotenpuncke*). Effectivement, *tout rayon dirigé vers le premier point nodal donne, à l'émergence, un rayon qui passe par le deuxième et est parallèle au rayon incident.* Cherchons à déterminer ces points nodaux.

Soient F et F′, R et R′ les éléments de notre lentille, c'est-à-dire les deux plans focaux et les deux plans principaux

(*fig.* 15). Considérons un rayon quelconque SH′ parallèle à l'axe; il coupe le premier plan focal en T et se réfracte suivant H′F′, passant par le second point focal F′ de la lentille. Le point T étant dans le plan focal, tous les rayons qui en émanent sortent de la lentille parallèles entre eux et à H′F′. Traçons un de ces rayons incidents, LTN, parallèle à H′F′ et perçant le premier plan principal en D; il se réfractera aussi parallèlement à H′F′. Le point D ayant pour conjugué D′, le

Fig. 15.



rayon conjugué de TN s'obtiendra en menant par D′ une parallèle D′N′ à H′F′. Or les deux triangles rectangles TFN et H′R′F′ sont égaux par construction et, par suite, la distance FN est égale à la seconde longueur focale R′F′; les deux autres triangles rectangles T′F′N′ et HDT sont aussi égaux par construction, car F′T′ = D′H′ = DH, et par suite la distance F′N′ est égale à TH ou FR, c'est-à-dire à la première longueur focale de la lentille. Donc les points N et N′ sont fixes et conjugués; à tout rayon incident qui, prolongé, passe par le point N, correspond un rayon émergent parallèle dont le prolongement passe par le point N′. Ce sont les *points nodaux* de la lentille : N se nomme *premier point nodal* et N′ *second point nodal*.

Il résulte de l'examen de la figure que la distance NN′, ap-

pelée *interstice* des nœuds, est égale à l'écartement RR′ des deux points principaux. En outre, on a

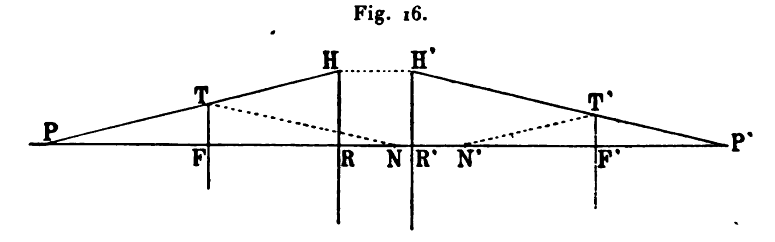
$$RN = R'N' = f' - f.$$

Les points nodaux se trouveront donc en portant, à partir des deux points principaux, du côté du foyer le plus long F′, des longueurs égales entre elles et à la différence des foyers, ou encore en portant de F vers F′ une longueur égale à f' et de F′ vers F une longueur égale à f.

Ces deux rayons parallèles, l'un incident, l'autre émergent, portent le nom de *lignes directrices* ou simplement de *directrices*. Celle qui représente le rayon incident s'appelle *première directrice* et l'autre *seconde directrice*. Leur rôle dans les appareils dioptriques est le même que celui des axes secondaires dans la réfraction par une seule surface réfringente. Ce sont aussi les points d'où l'œil pourrait voir les dimensions homologues de l'objet et de l'image sous le même diamètre apparent, c'est-à-dire avec le même *grossissement angulaire*.

Autre construction d'un rayon conjugué, des images. — En utilisant la propriété des points nodaux, on construit d'une manière élégante et rapide : 1° le conjugué d'un rayon incident quelconque; 2° l'image d'un point placé d'une manière quelconque.

Fig. 16.



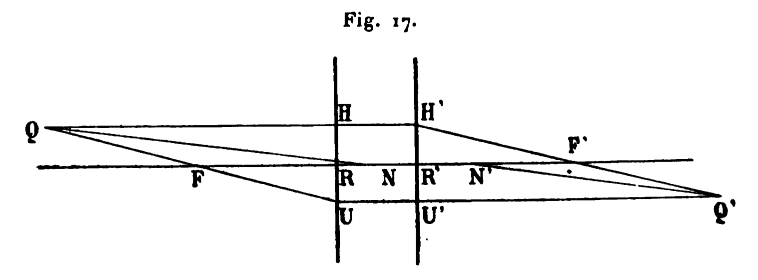
1° Soit PH un rayon incident (*fig.* 16) qui rencontre le premier plan focal en T et le premier plan principal en H. Tout rayon issu de T est parallèle après réfraction à la *première directrice* TN. Le point H ayant pour conjugué H′, le rayon émergent est H′P′ parallèle à TN.

D'après ce que nous avons dit précédemment sur la propriété du second plan focal, nous pouvons aussi procéder de la manière suivante : tirons la directrice N′T′ parallèle à PH ; cette ligne coupe en T′ le second plan focal, et c'est en T′ que viennent concourir tous les rayons incidents parallèles à PH : H′T′ est le rayon réfracté.

2° Soit Q un point lumineux hors de l'axe (*fig.* 17).

On trace le rayon incident QH′, parallèle à l'axe, qui donne

Fig. 17.



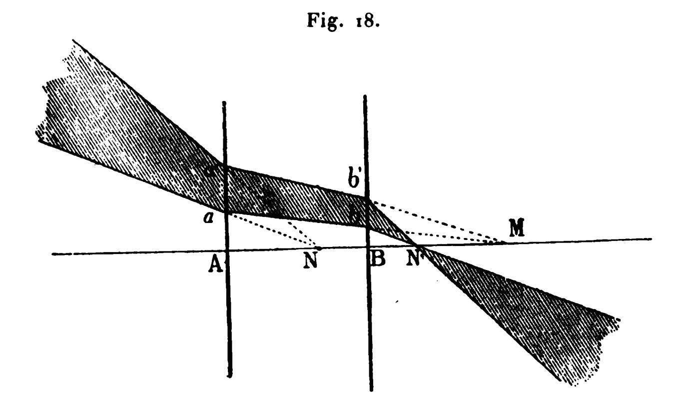
le réfracté H′F′; puis on tire le couple de directrices QN, N′Q′. L'intersection de la deuxième directrice N′Q′ avec H′F′ donne en Q′ l'image de Q.

On peut aussi tracer QF passant par le premier point focal; ce rayon incident donne le réfracté parallèle à l'axe UQ′. L'intersection de ce dernier avec la directrice N′Q′ donne l'image cherchée.

Centre optique. — Il est intéressant de montrer quel est isolément le rôle des points nodaux dans les constructions

géométriques qui aboutissent à l'image d'un objet. Un cône de rayons qui converge en N (*fig.* 18) donne naissance à un second cône qui diverge de N′ et se trouve constitué par des rayons parallèles deux à deux à ceux du premier cône. Il est digne de remarque que les rayons intérieurs à la lentille, *ab*,

Fig. 18.



a′b′, qui unissent les points d'incidence et d'émergence de deux rayons conjugués, se coupent en un même point M sur l'axe de la lentille. En effet, les triangles semblables MN*a* et MN′*b* d'une part, et MA*a*, MB*b* d'autre part, donnent

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MN'}} = \frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}b} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}},$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MN'}} = \frac{\mathrm{MA}-\mathrm{MN}}{\mathrm{MB}-\mathrm{MN'}} = \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{N'B}}.$$

Ainsi le point M est situé à des distances de deux points fixes N et N′, respectivement proportionnelles à deux longueurs fixes. *C'est donc un point fixe dans la lentille.* On peut l'appeler le *centre optique.*

Les trois points N, M, N′ sont conjugués deux à deux; N et N′ sont les images du centre optique à travers les faces A et B.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS CARDINAUX D'UNE LENTILLE.

Le système de deux surfaces réfringentes ou *lentille* peut être remplacé par un système composé de

1° Six points, savoir :

Deux points *principaux,*
Deux points *focaux,*
Deux points *nodaux.*

2° Quatre plans, perpendiculaires à l'axe commun, qui comprennent :

Deux plans *principaux,*
Deux plans *focaux.*

L'ensemble de ces points et de ces plans s'appelle les *éléments cardinaux* de la lentille.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes servis de ces éléments comme s'ils étaient connus de position; mais nous n'avons pas appris à les déterminer; c'est ce qu'il nous reste à faire.

Or il est clair que ces éléments seront complètement déterminés, si l'on connaît les longueurs focales, les distances des points principaux aux pôles correspondants des surfaces réfringentes et l'*interstice* des nœuds ou la distance des points principaux.

Calculons d'abord les longueurs focales f et f' (*fig.* 19).

La lentille est limitée par deux faces A et B. La première

face A, de rayon R, a deux foyers F_1 et F'_1 et, par suite, deux distances focales f_1 et f'_1 qui sont respectivement (Chap. I)

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$$

et

$$f'_1 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}.$$

De même la face B, de rayon R', a deux foyers F_2 et F'_2 et, par suite, deux distances focales f_2 et f'_2, qui sont données par les deux équations

$$f_2 = \frac{n_2 R'}{n_2 - n_3} \text{ (1)}$$

et

$$f'_2 = \frac{n_3 R'}{n_2 - n_3}.$$

Enfin, appelons ε la distance AB ou l'épaisseur de la lentille, et soient F et F' les deux foyers principaux de la lentille déterminés d'après le procédé indiqué à la page 31.

Les deux triangles rectangles H'R'F' et J'BF' sont semblables et donnent

$$\frac{H'R'}{J'B} = \frac{R'F'}{BF'}.$$

D'autre part, les deux triangles rectangles semblables IAF'_1 et $J'BF'_1$ donnent aussi

$$\frac{IA}{J'B} = \frac{AF'_1}{BF'_1},$$

et comme

$$IA = H'R',$$

(1) Pour établir ces expressions des longueurs focales élémentaires, il ne faut pas oublier que la lentille est supposée biconvexe et d'un indice supérieur à ceux des milieux extrêmes.

on déduit

$$(1)\qquad \frac{R'F'}{BF'} = \frac{AF'_1}{BF'_1} = \frac{f'_1}{f'_1 - \varepsilon}.$$

Il faut remarquer, d'après ce qui a été dit page 31, que F'_1 et F' sont foyers conjugués l'un de l'autre par rapport à la face B. En conséquence, appliquons à ces points la *formule transformée,* en ayant égard aux conventions sur les signes; il vient

$$-\frac{f_2}{BF'_1} + \frac{f'_2}{BF'} = 1,$$

d'où

$$BF' = f_1 - \varepsilon \frac{f'_2}{f'_1 + f_2 - \varepsilon}.$$

On tire de (1)

$$R'F' = BF' \frac{f'_1}{f'_1 - \varepsilon}$$

et, par suite,

$$R'F' = f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f_2 - \varepsilon}.$$

On trouverait de même

$$RF = f = \frac{f_1 f_2}{f'_1 + f_2 - \varepsilon}.$$

Le rapport de ces distances focales est donné par l'égalité

$$\frac{f'}{f} = \frac{f'_1 f'_2}{f_1 f_2}.$$

Mais, d'après les valeurs des longueurs focales élémentaires, on a

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{f'_2}{f_2} = \frac{n_3}{n_2},$$

donc

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_2}{n_1}\frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3}{n_1}.$$

Ainsi, *le rapport de la seconde à la première distance focale est égal au rapport de l'indice n_3 du dernier milieu réfringent à l'indice n_1 du premier.*

Quand ces milieux extrêmes sont les mêmes, *les longueurs focales deviennent égales* et leur valeur commune est

$$f = \frac{nRR'}{(n-1)[n(R+R')-\varepsilon(n-1)]},$$

d'où

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} - \frac{(n-1)\varepsilon}{nRR'}\right],$$

n désignant l'*indice relatif* de la lentille.

En second lieu, calculons la distance de chaque point principal à la surface réfringente voisine. Soient h_1 et h_2 les distances AR et BR'. On déduit aisément de la relation (1)

$$\frac{R'F' - BF'}{R'F'} = \frac{h_2}{R'F'} = \frac{\varepsilon}{f'_1},$$

d'où

$$h_2 = \varepsilon\frac{f'}{f'_1} = \varepsilon\frac{f'_2}{f'_1 + f_2 - \varepsilon}.$$

On trouverait de même

$$h_1 = \varepsilon\frac{f_1}{f'_1 + f_2 - \varepsilon}.$$

Le rapport de h_1 à h_2, rendu explicite, fournit la relation

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{f_1}{f'_2} = \frac{n_1\dfrac{R}{n_2 - n_1}}{n_3\dfrac{R'}{n_2 - n_3}}$$

ou simplement

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R}{R'},$$

si $n_1 = n_3$, c'est-à-dire si les milieux extrêmes sont identiques. Dans ce cas particulier, *les distances des points principaux aux faces de la lentille sont proportionnelles aux rayons de ces faces.*

On a aussi séparément, pour h_1 et h_2,

$$h_1 = \varepsilon \frac{R}{n(R + R') - \varepsilon(n - 1)},$$

$$h_2 = \varepsilon \frac{R'}{n(R + R') - \varepsilon(n - 1)}.$$

En troisième lieu, on a, pour la distance mutuelle des points principaux ou l'interstice des nœuds,

$$\Delta = \varepsilon - h_1 - h_2,$$

ou, dans le cas où le premier et le dernier milieu sont les mêmes,

$$\Delta = \frac{\varepsilon(n - 1)(R + R' - \varepsilon)}{n(R + R') - \varepsilon(n - 1)}.$$

Les expressions précédentes conduisent immédiatement à la démonstration du théorème suivant, si important dans l'étude physique de l'œil :

Dans un système de surfaces sphériques réfringentes, on peut, sans modifier la réfraction des rayons, accoler à chaque surface réfringente une couche infiniment mince, d'indice quelconque, présentant la même courbure sur ses deux faces.

Effectivement, si l'on suppose que l'épaisseur de la lentille devienne infiniment petite et qu'on ait à la limite $\varepsilon = 0$, et si

l'on pose, en outre, $R' = -R$, les valeurs de f et de f' se réduisent à

$$f = \frac{n_1 R}{n_3 - n_1},$$

$$f' = \frac{n_3 R}{n_3 - n_1};$$

de plus, on trouve

$$h_1 = h_2 = \Delta = 0.$$

Ainsi les plans principaux coïncident entre eux et avec le plan tangent au sommet de la surface réfringente; les longueurs focales, indépendantes de n_2, sont exactement les mêmes que s'il n'y avait qu'une seule surface réfringente, séparant deux milieux d'indices n_1 et n_3 (¹).

Quant aux deux points nodaux N et N', ils doivent satisfaire aux conditions

$$FN = f', \quad F'N' = f.$$

On en conclut que *les distances focales relatives aux points nodaux sont entre elles comme les inverses des indices de réfraction du premier et du dernier milieu.*

Si les milieux extrêmes sont identiques, comme les longueurs focales deviennent égales, *les points nodaux se confondent avec les points principaux,* et le centre optique M (*fig.* 18) coïncide avec le pied O de la perpendiculaire KO (*fig.* 19), car on a vu que les trois points R, O, R' sont conjugués deux à deux.

Remarque.

L'équation d'Helmholtz, établie pour une seule surface ré-

(¹) *Voir* Chap. I, p. 7.

fringente, est applicable à une lentille et *plus généralement à un système quelconque de surfaces sphériques réfringentes.*

On a

$$n_1 \mathrm{O} \operatorname{tang} \alpha = n_3 \mathrm{I} \operatorname{tang} \alpha',$$

n_1 et n_3 étant les indices des milieux extrêmes.

Considérons deux plans perpendiculaires à l'axe principal passant par les points nodaux. Pour chaque groupe de points conjugués situés dans ces plans, on a

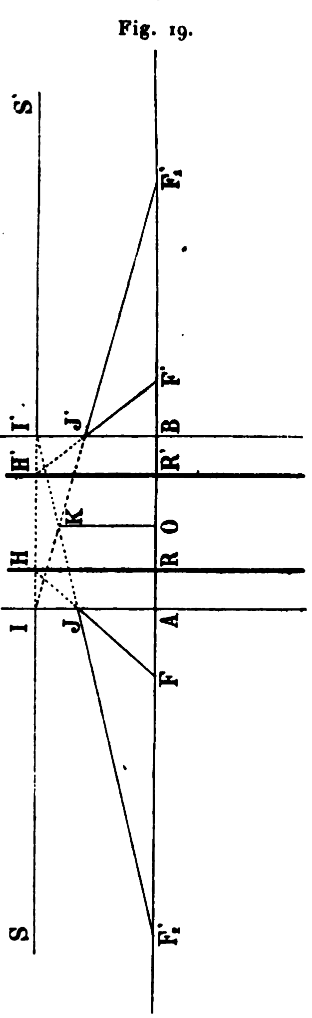
$$\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} \alpha',$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{O}} = \frac{n_1}{n_3}.$$

Les dimensions linéaires de deux images conjuguées, situées dans les plans nodaux, sont entre elles comme les inverses des indices de réfraction du premier et du dernier milieu.

Fig. 19.



On a quelquefois utilisé cette propriété pour la recherche directe des points nodaux ([1]).

([1]) *Voir* Helmholtz, *Optique physiologique*, p. 79.

En admettant les conventions connues sur les signes des grandeurs géométriques, les formules précédentes sont douées de généralité : *elles restent vraies quelles que soient les valeurs des indices de réfraction* n_1, n_2, n_3 *des trois milieux transparents que la lumière traverse, et représentent en grandeur et en direction les éléments cardinaux d'une lentille de forme quelconque placée entre deux milieux d'indice quelconque.*

Cela posé, nous allons passer en revue les différentes sortes de lentilles, soit convergentes, soit divergentes.

Commençons par l'étude des lentilles convergentes.

Pour nous borner au cas de la pratique, nous supposerons que le premier et le dernier milieu sont identiques, que leur indice de réfraction est moindre que celui du milieu moyen, et qu'enfin l'épaisseur de la lentille est moindre que *chacun des rayons de courbure*. Ce sont les lentilles ordinaires.

Rappelons les formules qui définissent les éléments cardinaux de la lentille.

Longueur focale :

$$f = \frac{n\mathrm{RR}'}{(n-1)[n(\mathrm{R}+\mathrm{R}')-\varepsilon(n-1)]}.$$

Distances du premier et du second plan principal à la première et à la seconde face de la lentille :

$$h_1 = \varepsilon\frac{\mathrm{R}}{n(\mathrm{R}+\mathrm{R}')-\varepsilon(n-1)},$$

$$h_2 = \varepsilon\frac{\mathrm{R}'}{n(\mathrm{R}+\mathrm{R}')-\varepsilon(n-1)}.$$

Distance mutuelle des points principaux :

$$\Delta = \frac{\varepsilon(n-1)(\mathrm{R}+\mathrm{R}'-\varepsilon)}{n(\mathrm{R}+\mathrm{R}')-\varepsilon(n-1)}.$$

LENTILLES CONVERGENTES.

I. — *Lentille biconvexe.*

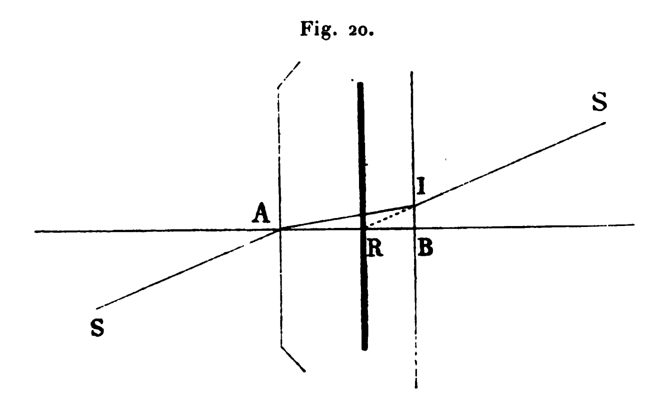
C'est la variété sur laquelle nous avons fait porter nos raisonnements et nos constructions pour l'établissement des formules précédentes.

La distance focale f est toujours positive. Les distances des points principaux aux surfaces, c'est-à-dire h_1 et h_2, sont toujours positives, et, par suite, ces points sont à l'intérieur de la lentille; enfin leur distance mutuelle Δ est positive, c'est-à-dire que le premier est en avant du second.

II. — *Lentille plan convexe* (*fig.* 20).

La lentille plan convexe forme un cas limite des lentilles

Fig. 20.



biconvexes. Ici, $R' = \infty$; la longueur focale est *positive* et égale à

$$\frac{R}{n - 1},$$

c'est-à-dire à la première distance focale de la face courbe. Les foyers principaux F et F' sont *réels*.

Le premier point principal coïncide avec le sommet A de la face convexe de la lentille. Le second point principal est situé dans l'intérieur de la lentille, au point R', tel que l'on ait

$$BR' = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Si la lentille plan-convexe devient *demi-boule*, il faut faire $\varepsilon = R$, ce qui donne

$$BR' = \frac{R}{n}.$$

III. — *Ménisque convergent.*

Pour étendre nos formules à ce cas particulier, il faut y remplacer R' par — R' et elles deviennent alors

$$f = \frac{nRR'}{(n-1)[n(R'-R+\varepsilon)-\varepsilon]},$$

$$h_1 = -\frac{\varepsilon R}{n(R'-R+\varepsilon)-\varepsilon},$$

$$h_2 = \frac{\varepsilon R'}{n(R'-R+\varepsilon)-\varepsilon},$$

$$\Delta = \frac{\varepsilon(n-1)(R'-R+\varepsilon)}{n(R'-R+\varepsilon)-\varepsilon}.$$

Les foyers du ménisque seront *réels*, si la distance focale est positive, ce qui donne la condition

$$R'-R+\varepsilon > \frac{\varepsilon}{n},$$

d'où l'on déduit

$$R' > R - \frac{n-1}{n}\varepsilon.$$

Ainsi, pour que notre ménisque soit *convergent,* il n'est pas nécessaire que le rayon de courbure R' de la face concave soit plus grand que le rayon de courbure R de la face convexe; il suffit que ce rayon R' soit plus grand que

$$R - \frac{n-1}{n}\varepsilon.$$

La face concave peut donc avoir une plus forte courbure que la face convexe.

Si l'on a

$$R' - R + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{n},$$

la distance focale a une valeur infinie; en d'autres termes, le ménisque se conduit comme un milieu réfringent terminé par des faces parallèles, et les rayons émergents sont parallèles aux rayons incidents.

Enfin, le ménisque concavo-convexe sera *divergent* si l'on a

$$R' - R + \varepsilon < \frac{\varepsilon}{n},$$

parce que la distance focale sera négative et que les foyers seront *virtuels.*

Interprétons géométriquement ces conditions.

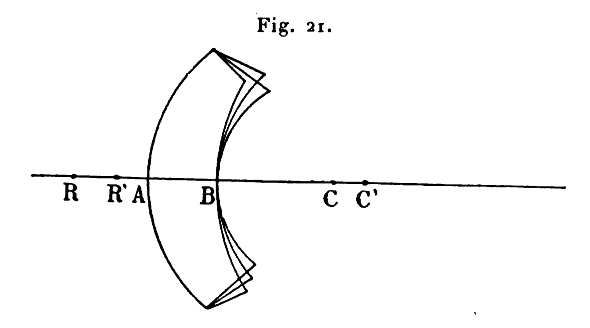
Soient A et B les pôles des deux surfaces séparées par la distance ε; C et C' leurs centres de courbure. Les points A, B, C sont fixes, et la distance variable CC' des deux centres de courbure est (*fig.* 21)

$$R' - R + \varepsilon.$$

Or, le second centre C' est-il à droite du premier, la lentille *s'amincit en allant du milieu à la circonférence;* est-il à gauche, au contraire, la lentille *s'épaissit au bord.* Pour

$CC' < \frac{\varepsilon}{n}$, on a un ménisque à foyer négatif et, par conséquent, divergent, dont l'épaisseur est pourtant moindre aux

Fig. 21.



bords ; pour $CC' = \frac{\varepsilon}{n}$, on a un verre que l'on pourrait appeler *neutre,* et enfin, pour $CC' > \frac{\varepsilon}{n}$, on a toujours un ménisque à distance focale positive et, par suite, convergent. On peut donc dire que, lorsqu'une lentille concave-convexe s'épaissit vers le bord, sa distance focale est négative, et que, si sa distance focale est positive, elle s'amincit vers les bords. Mais *il ne faut pas énoncer les deux propositions réciproques, comme on le fait souvent à tort.*

Revenons au ménisque convergent.

La valeur de h_1 étant négative, le premier point principal R est situé en avant de la face convexe. La valeur de h_2 étant positive, le second point principal R' est situé en avant de la face concave de la lentille.

Leur distance mutuelle Δ est positive, c'est-à-dire que le premier est en avant du second. Enfin, la longueur focale f étant positive et plus grande que h_2, le second foyer ne peut tomber à l'intérieur de la lentille.

Discussion des position et grandeur relatives des images dans les lentilles convergentes ou à distance focale positive.

Pour établir cette discussion, on peut s'adresser indifféremment à l'une ou à l'autre des formules précédentes, *classique, transformée* ou *simplifiée*. Voici les résultats auxquels on parviendra :

Lorsque l'objet est infiniment éloigné, l'image se trouve sur le second plan focal ; elle est infiniment petite et renversée.

Quand l'objet se rapproche de la lentille, l'image s'en éloigne, reste réelle, renversée et augmente de grandeur.

Si l'objet est à une distance du premier plan principal double de la distance focale, l'objet et son image sont de même grandeur.

Enfin, quand l'objet est arrivé dans le premier plan focal, la distance et la grandeur de son image sont infinies.

Maintenant, supposons que l'objet passe à droite du premier plan focal.

Tant qu'il est compris entre ce plan et le premier plan principal, l'image passe à gauche de la lentille, devient virtuelle, reste droite et s'avance depuis l'infini jusqu'au second plan principal.

Sa grandeur diminue continûment.

Enfin, quand l'objet est arrivé dans le premier plan principal, l'image, toujours virtuelle et droite, est située dans le second plan principal et devient égale en grandeur à l'objet.

Il résulte de ce qui précède que, l'objet se déplaçant entre le premier plan focal et le premier plan principal, l'image voyage depuis l'infini jusqu'au second plan principal. Nous sommes donc amenés à reconnaître l'existence d'un plan,

perpendiculaire à l'axe, qui présente cette particularité remarquable que tout point qui y est contenu a son image dans le même plan (¹). Le point d'intersection de ce plan avec l'axe principal contient à la fois le point lumineux et son image.

La détermination de ce point et de ce plan est très simple; elle repose sur deux conditions. La somme des distances d et d' est égale à l'écartement des plans focaux, c'est-à-dire que

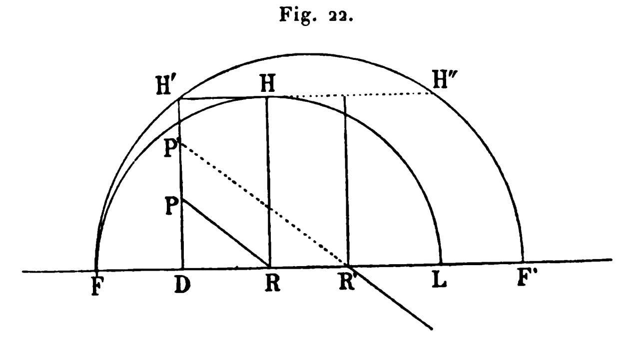
$$d + d' = 2f + \Delta,$$

Δ étant l'écartement des plans principaux. Le produit de ces distances d et d' est égal au carré de la longueur focale

$$dd' = f^2.$$

Nous sommes ainsi conduits à la construction suivante

Fig. 22.



(*fig.* 22) : prenons $FL = 2f$ et décrivons sur cette ligne comme diamètre une demi-circonférence qui coupera au

(¹) L'existence de ce plan a été reconnue analytiquement par Bravais dans le système de lentilles qui constitue la lunette astronomique accommodée pour une distance infinie de la vision distincte. Aussi M. Martin a-t-il proposé de l'appeler *plan Bravais*. (MARTIN, Thèse de doctorat.)

point H la perpendiculaire RH élevée au premier point principal R. On aura

$$\overline{HR}^2 = f^2.$$

Ensuite, sur FF′ comme diamètre, décrivons une autre demi-circonférence, menons H′HH″ parallèle à l'axe, et abaissons la perpendiculaire H′D, on aura

$$FD \times F'D = dd' = \overline{H'D}^2 = f^2.$$

Le point D est donc le point cherché; il y aura, comme on pouvait le prévoir, deux solutions.

Dans le plan perpendiculaire à l'axe, passant par D, prenons un point quelconque P. Pour avoir son image P′, contenue dans ce plan, traçons la première directrice RP, et menons la seconde directrice R′P′ jusqu'à sa rencontre avec ce plan (1).

En résumé, on peut dire que les lentilles à foyers *réels,* c'est-à-dire à distance focale positive, rendent convergents les rayons parallèles et les font se réunir dans le plan focal. Elles rendent encore plus convergents les rayons qui leur arrivent avec une certaine convergence; enfin elles rendent moins divergents ou font même converger les rayons qui les atteignent en divergeant, et cela suivant que ces rayons proviennent d'un point situé à droite ou à gauche du foyer principal.

LENTILLES DIVERGENTES.

Passons en revue les trois variétés : *lentilles biconcave, plan-concave* et *ménisque divergent.*

(1) Dans les *Annales de Poggendorff* (1866), Listing a fait une étude des propriétés de ces points, tels que D, qu'il appelle justement *points symptotiques.*

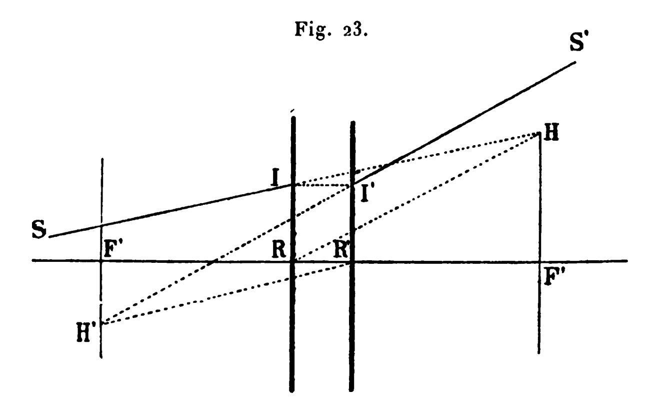
I. — *Lentille biconcave.*

Ici il faut changer R en — R, R′ en — R′ dans les formules fondamentales. La distance focale f est toujours négative ; les foyers principaux sont toujours virtuels. Le premier foyer principal F est dans le milieu postérieur, le second foyer principal F′ dans le milieu antérieur.

Les distances des points principaux aux surfaces, c'est-à-dire h_1 et h_2, sont toujours positives, et, par suite, ces points sont à l'intérieur de la lentille. Enfin leur distance mutuelle Δ est positive, ce qui signifie que le premier est en avant du second.

Les plans focaux et principaux présentent des propriétés

Fig. 23.



tout à fait identiques avec celles que nous avons reconnues dans une lentille convergente ou positive. Donc, en s'appuyant sur ces propriétés et sur celles des points nodaux, on pourra résoudre graphiquement les deux problèmes suivants, pour nous préparer à la théorie de la lunette de Galilée.

1° *Construire le conjugué d'un rayon quelconque.*

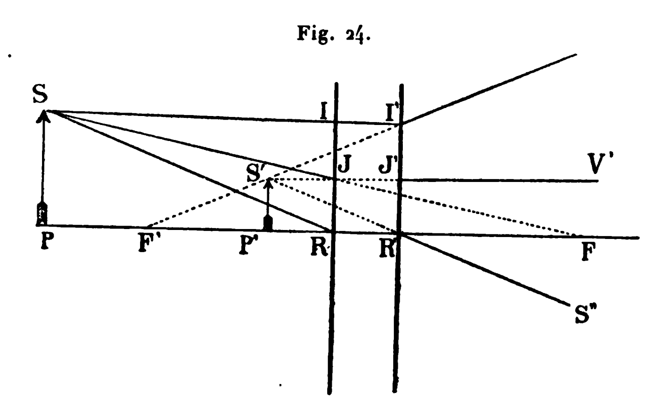
Soient SI le rayon incident, H le point où il perce le premier

plan focal F ; tous les rayons émanant de H sont parallèles à la première directrice HR. D'ailleurs I′ est l'image de I; donc I′S′, parallèle à HR, est la direction du rayon réfracté (*fig.* 23).

Autrement. Le second plan focal F′ est lieu des points où viennent concourir, après réfraction, les rayons parallèles aux diverses directrices. Menons donc R′H′ parallèle à SI : H′ est un point du rayon réfracté et, comme vérification, H′I′ est le prolongement de I′S′.

2° *Construire l'image d'un objet* (*fig.* 24).

Fig. 24.



Soit S un point lumineux hors de l'axe; menons SI′ parallèle à l'axe. L'image de S est sur le rayon I′F′ passant par le second foyer principal; elle est aussi sur la seconde directrice R′S″ parallèle à SR. Elle est donc à l'intersection S′ de ces deux droites. Il y a une vérification. Considérons le rayon SF passant par le premier point focal F ; après sa réfraction, il doit être parallèle à l'axe; mais il rencontre le premier plan principal au point J, qui a pour image J′. La parallèle à l'axe J′V′ doit passer par le point S′.

Enfin, la flèche SP a pour image *droite, virtuelle,* réduite, la flèche S′P′.

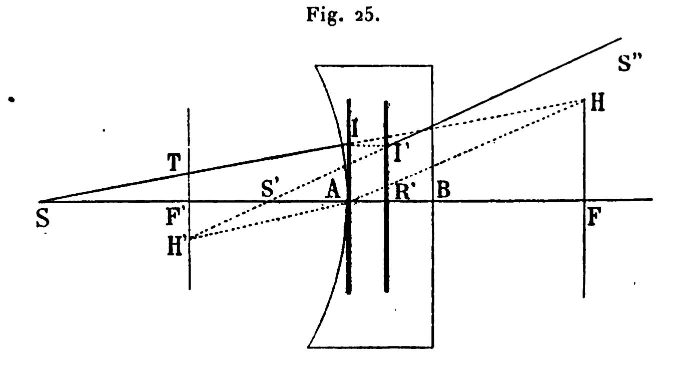
II. — *Lentille plan-concave.*

La lentille plan-concave forme un cas limite des lentilles biconcaves. Ici, il faut changer R en — R et poser $R' = \infty$ dans nos relations fondamentales. On trouve alors, pour la longueur focale,

$$f = -\frac{R}{n-1} = f_1.$$

La longueur focale est négative et égale à la première dis-

Fig. 25.



tance focale de la face courbe. Les foyers principaux F et F′ sont *virtuels* (*fig.* 25).

Les distances des points principaux deviennent

$$h_1 = 0, \quad h_2 = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Le premier point principal coïncide avec le sommet A de la face concave de la lentille. Le second point principal est

situé dans l'intérieur de la lentille, au point R', tel que l'on ait $BR' = \frac{\varepsilon}{n}$.

Les constructions qui déterminent l'image d'un objet, dans une position quelconque, sont identiques à celles que nous avons développées sur la lentille biconcave.

Contentons-nous de reproduire, sans commentaire superflu, le tracé du rayon conjugué d'un rayon incident quelconque.

III. — *Ménisque divergent.*

En discutant les formules appropriées au ménisque convergent, nous avons trouvé la condition

$$R' - R + \varepsilon < \frac{\varepsilon}{n}$$

pour que la distance focale soit négative, c'est-à-dire pour que le ménisque devienne divergent. En outre, si ce cas est réalisé, il résulte de l'examen des relations fondamentales que le premier point principal est situé à droite de la surface convexe, et le second point principal à droite ou en arrière de la surface concave ou ménisque, puisqu'on déduit

$$h_1 > 0 \quad \text{et} \quad h_2 < 0.$$

Enfin, nous avons reconnu que la lentille s'épaissit vers les bords si l'on a

$$R' - R + \varepsilon < 0$$

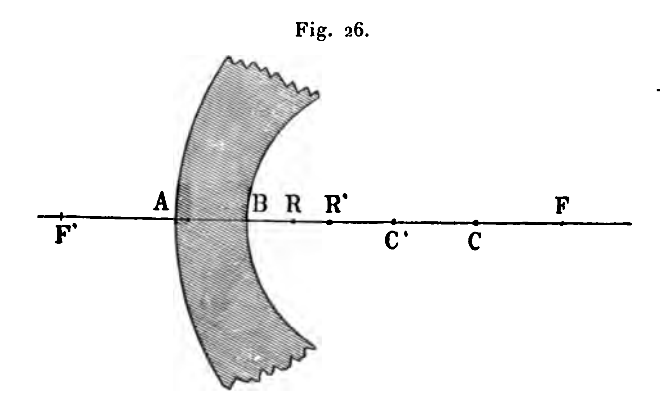
et qu'au contraire elle s'amincit du milieu à la circonférence si l'on a

$$R' - R + \varepsilon > 0.$$

On en conclut immédiatement que la valeur de Δ est *positive* dans le premier cas, *négative* dans le second, ce qui signifie que le second point principal est en arrière du premier,

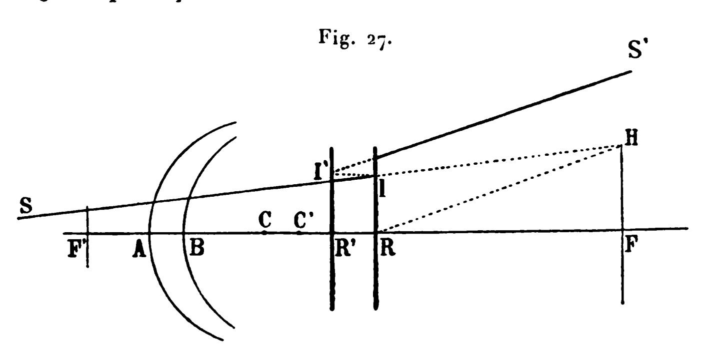
c'est-à-dire plus loin de la lentille, quand celle-ci s'épaissit vers son bord. Il est, au contraire, en avant du premier quand la lentille à foyer négatif s'amincit vers sa périphérie. Enfin, les deux points principaux coïncident quand les deux surfaces appartiennent à des sphères concentriques, et alors ils sont situés au centre commun de ces sphères.

Fig. 26.



La *fig.* 26 représente une lentille concave-convexe, à foyer négatif, qui s'épaissit vers les bords.

Fig. 27.



La *fig.* 27 en représente une autre, également à foyer négatif, dont l'épaisseur est moindre aux bords.

Le centre de courbure de la première surface est marqué C et celui de la seconde est marqué C'.

Dans la *fig.* 26, C' est à gauche de C; on a

$$R' - R + \varepsilon < 0,$$

et, par suite, h_1 et h_2 sont respectivement plus petits en valeur absolue que R et que R'. Le système des points principaux est donc situé à gauche du système des centres de courbure.

Dans la *fig.* 27, C' est à droite de C; on a

$$R' - R + \varepsilon > 0;$$

h_1 et h_2 sont respectivement plus grands en valeur absolue que R et que R'. Le système des points principaux est en arrière du système des centres de courbure.

Nous donnons la construction des rayons pour ce cas singulier.

Remarque.

Je ferai observer que les foyers ne tombent jamais à l'intérieur de la lentille, que le ménisque soit *convergent* ou *divergent*. Cela résulte des conditions restrictives que nous nous sommes imposées (*voir* p. 46); on doit toujours avoir en valeur absolue

$$R > \varepsilon \quad \text{et} \quad R' > \varepsilon.$$

Or, on peut mettre l'expression de la distance focale sous la forme suivante :

$$f = -\frac{nR'}{\varepsilon(n-1)} h_1 = \frac{nR}{\varepsilon(n-1)} h_2.$$

Il suit que la distance focale est toujours supérieure en

valeur absolue aux distances h_1 et h_2; les deux points focaux sont toujours situés de part et d'autre de la lentille.

Discussion des positions et grandeur relatives des images dans les lentilles divergentes ou à distance focale négative.

Les lentilles *à distance focale négative* se nomment aussi *dispersives,* parce qu'elles font diverger, qu'elles dispersent les rayons parallèles qui leur arrivent, qu'elles augmentent la divergence des rayons déjà divergents et diminuent la convergence des rayons convergents ou même les rendent divergents.

La position et la grandeur de l'image sont données par les deux formules

$$p' = -\frac{pf}{f+p},$$

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{O}} = -\frac{f}{f+p} \quad (^1).$$

Il en résulte que, pour toute valeur positive de p, p' est négatif, et que, p diminuant depuis ∞ jusqu'à o, p' varie depuis $-f$ jusqu'à o, et la grandeur I de l'image depuis o jusqu'à la grandeur de l'objet lui-même. Donc les lentilles divergentes donnent, d'objets réels situés en avant du premier plan principal, des images virtuelles situées en avant du second plan principal, droites, moindres que l'objet, plus voisines de la lentille, et oscillant entre le second plan focal F′ et le second plan principal R′, pendant que l'objet se déplace depuis l'infini jusqu'au premier plan principal R.

---

(1) Le signe — indique des images droites et le signe + des images renversées.

Quand l'objet virtuel est sur le premier plan principal, son image virtuelle, de même grandeur, est sur le second plan principal.

Pour les valeurs de p négatives, mais moindres que f en valeur absolue, p' devient positif, et, pendant que p varie de o à $-f$, p' croît de o à $+\infty$ et l'image I croît depuis O jusqu'à $-\infty$.

Les rayons qui arrivent à la lentille en convergeant deviennent donc moins convergents *si leur point de concours virtuel est situé en avant du plan focal postérieur.*

Pour des valeurs négatives de p, supérieures à f en valeur absolue, p' est négatif et I devient positif. Il se produit donc en avant du verre des images *renversées* et *virtuelles*. Pendant que p varie depuis $-f$ jusqu'à $-\infty$, p' varie depuis $-\infty$ jusqu'à $-f$, et I depuis $+\infty$ jusqu'à o. Les rayons convergents sont donc rendus divergents par les lentilles à foyer négatif quand leur point de concours est situé au delà du foyer postérieur.

CHAPITRE III.

RÉFRACTION A TRAVERS UN NOMBRE QUELCONQUE DE LENTILLES.

Étant donné un nombre quelconque de lentilles, centrées sur le même axe, et un objet P placé en avant du système, on peut toujours trouver, par les constructions géométriques qui viennent d'être exposées avec détail, la position de son image P′ après la dernière réfraction. Il suffirait de chercher successivement, pour chaque surface de séparation, le point conjugué correspondant, et de le faire servir d'objet par rapport à la surface suivante. Mais ce procédé, aussi long que fastidieux, serait inapplicable, car il faudrait recommencer la même série d'opérations pour chaque nouvelle position attribuée à l'objet.

C'est ici surtout, comme on va le reconnaître, que les principes de la théorie de Gauss, convenablement interprétés, introduisent une admirable simplification. Effectivement, nous allons démontrer que les éléments fondamentaux de tout système dioptrique, quelque compliqué qu'il soit, sont les mêmes que ceux d'une lentille simple. Ce système est composé de

1° 6 *points cardinaux,* savoir :

2 points *principaux;*

2 points *focaux;*

2 points *nodaux.*

2° 4 *plans, perpendiculaires à l'axe commun,* qui comprennent :

2 plans *principaux;*

2 plans *focaux.*

Étudions d'abord le cas de l'*association de deux lentilles* entourées et limitées par des milieux différents.

Soient R et R' les deux points principaux de la lentille L, $f = RF$ et $f' = R'F'$ ses deux distances focales. Soient de même, pour la lentille L_1, R_1 et R'_1 les deux points principaux, $f_1 = R_1F_1$ et $f'_1 = R'_1F'_1$ les deux distances focales. Enfin, désignons par d l'écartement des deux lentilles, c'est-à-dire la distance du second point principal de L au premier point principal de L_1 (*fig.* 31).

Recherchons les points et plans principaux du système de ces deux lentilles.

A cet effet, traçons une droite indéfinie SS_1 parallèle à l'axe principal, qui perce en I le second plan principal de L et en I_1 le premier plan principal de L_1. Si SI est un rayon incident, le rayon réfracté correspondant est IF'; de même, si S_1I_1 est un rayon incident, il se réfracte suivant I_1F_1. Du point K, intersection de ces deux rayons réfractés, abaissons KO perpendiculaire sur l'axe principal. Je dis que le point O est le même pour tous les rayons parallèles à cet axe.

En effet, il résulte de la construction que les deux triangles IR'F' et KOF' sont semblables et donnent l'égalité de rapports

$$\frac{IR'}{KO} = \frac{R'F'}{OF'}.$$

Les deux autres triangles $I_1R_1F_1$ et KOF_1 sont semblables et fournissent pareillement

$$\frac{I_1R_1 \text{ ou } IR'}{KO} = \frac{R_1F_1}{OF_1}.$$

Donc

$$\frac{OF_1}{OF'} = \frac{f_1}{f'}.$$

Le point O est un *point fixe*. Actuellement, regardons la

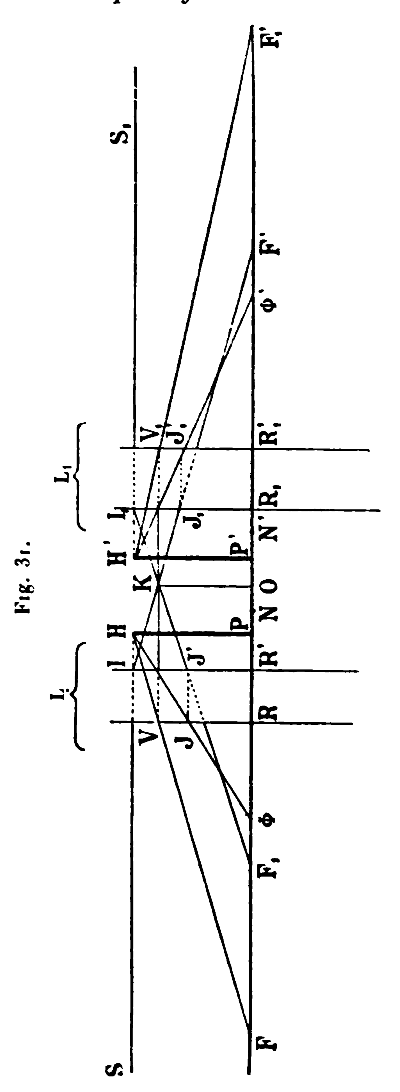


Fig. 31.

perpendiculaire KO comme une ligne lumineuse fixe, rayon-

nant à la fois vers les deux lentilles. L'image de K à travers la lentille L est en H, à travers la lentille L_1 en H'. Abaissons HP et H'P' perpendiculaires sur l'axe principal; d'après la propriété des plans conjugués, HP est l'image de la ligne lumineuse KO à travers la lentille L et H'P' l'image de la même droite à travers la lentille L_1. Ces deux images sont *droites* et de *même grandeur*. On en conclut (1) que les plans HP, H'P', perpendiculaires à l'axe, sont les *deux plans principaux* du système combiné.

Quand on connaît la position des points principaux P et P', il est facile de déterminer géométriquement la position des deux points focaux Φ et Φ'.

Un rayon incident SI, parallèle à l'axe, est réfracté par la première lentille L suivant IF' et perce en J_1 le premier plan principal de la seconde lentille L_1, et J_1 a pour image J'_1, qui appartient au rayon émergent.

D'autre part, le rayon incident perce le second plan principal du système en H', qui se trouve nécessairement aussi sur la direction du rayon émergent. Le rayon définitivement réfracté est donc $H'J'_1\Phi'$, et Φ' est le second point focal du système. On déterminerait de même le premier point focal Φ en traçant $HJ\Phi$.

Il s'agit de calculer les distances focales $P\Phi = \varphi$ et $P'\Phi' = \varphi'$.

Considérons les deux triangles rectangles semblables IR'F' et J_1R_1F', et les deux autres $H'P'\Phi'$ et $J'_1R'_1\Phi'$; on aura successivement

$$\frac{IR'}{J_1R_1} = \frac{R'F'}{R_1F'}$$

(1) Chap. II, p. 30.

et

$$\frac{H'P'}{J'_1 R'_1} = \frac{P'\Phi'}{R'_1 \Phi'},$$

d'où

$$\varphi' = R'_1 \Phi' \frac{f'}{f' - d}.$$

Remarquons maintenant que F′ et Φ′ sont foyers conjugués l'un de l'autre par rapport à la seconde lentille L_1. En conséquence, appliquons à ces points la *formule transformée*, eu égard aux conventions sur les signes; il vient

$$-\frac{f_1}{R_1 F'} + \frac{f'_1}{R'_1 \Phi'} = 1,$$

d'où

$$R'_1 \Phi' = \frac{f'_1 (f' - d)}{f' + f_1 - d},$$

et par suite, pour φ′, après substitution,

$$\varphi' = \frac{f'_1 . f'}{f' + f_1 - d}.$$

Après calcul identique, on trouverait de même pour la première distance focale

$$\varphi = \frac{f f_1}{f' + f_1 - d}.$$

On connaît la position des points ou plans principaux par les distances RP et $R'_1 P'$.

Or

$$R'_1 P' = P'\Phi' - R'_1 \Phi',$$

et par suite

$$R'_1 P' = d \frac{f'_1}{f' + f_1 - d},$$

et aussi

$$RP = d \frac{f}{f' + f_1 - d}.$$

Quant aux points N et N′ nodaux, on démontrerait, comme nous l'avons fait au Chapitre II (p. 36), qu'ils sont définis par les deux conditions

$$\Phi N = \varphi'$$

et

$$\Phi' N' = \varphi.$$

A tout rayon incident passant par N correspond un rayon émergent, parallèle, passant par N′. Ces deux rayons s'appellent *directrices* ou *lignes de direction,* et il y a aussi à considérer la première et la seconde directrice.

On pourrait, en suivant la marche adoptée, composer trois, quatre, etc., un nombre quelconque de lentilles. On composerait d'abord deux lentilles quelconques, et l'on associerait le système résultant à une troisième, et ainsi de suite. Dans le Chapitre consacré aux instruments d'Optique, nous verrons des exemples pratiques de ces conjugaisons de lentilles associées par couples.

Œil schématique. — Maintenant, je veux attirer l'attention sur un cas particulier très important, réalisé par l'organe de la vision. Au point de vue de la réfraction, l'œil humain se compose de deux systèmes optiques, la cornée et le cristallin; le milieu antérieur est de l'air, le milieu intermédiaire est de l'humeur aqueuse et le milieu postérieur est du corps vitré. On sait qu'il est permis d'assimiler ces surfaces réfringentes à des calottes sphériques, de les regarder comme rigoureusement centrées, et enfin de négliger la petite différence qui existe entre les indices de réfraction de l'humeur aqueuse et du corps vitré.

On doit à Helmholtz d'avoir *conçu théoriquement et vérifié expérimentalement* que l'action réfringente de la cornée se

réduit à l'action d'une seule surface réfringente, séparant l'air de l'humeur aqueuse.

Quant au cristallin, il se réduit à une lentille unique, dont les longueurs focales sont égales (voir *Remarque* suivante).

Pour approprier nos formules à ce cas particulier, il suffit d'y faire $f_1 = f'_1$ et d'y remplacer, d'une part, f_1 ou f'_1 par la valeur résultant de l'expérience et, de l'autre, f par

$$\frac{R}{n-1}$$

et f' par

$$\frac{nR}{n-1},$$

R étant le rayon de courbure de la face antérieure de la cornée et n l'indice de réfraction de l'humeur aqueuse. On aura ainsi les éléments de l'*œil schématique,* calculés pour la première fois par Listing.

Remarque.

Si le système des lentilles est placé dans l'air ou plongé dans un même milieu transparent, les distances focales sont égales. En effet, on a

$$f = f'$$

et

$$f_1 = f'_1,$$

d'où l'on conclut

$$\varphi - \varphi'.$$

CHAPITRE IV.

LENTILLE ÉQUIVALENTE.

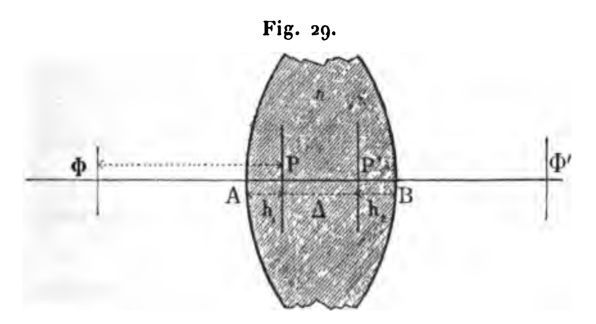
Dans ce Chapitre, nous nous proposons de résoudre le problème suivant :

Quelle est la lentille unique équivalente à un système optique donné?

Comme les résultats de la réfraction, dans un système optique, ne dépendent que de la position des foyers et des points principaux ou nodaux, on peut, sans modifier le *lieu* et la *grandeur* des images, substituer l'un à l'autre deux systèmes optiques dont les foyers et les points principaux coïncident, par exemple une lentille unique à un assemblage de lentilles centrées sur le même axe.

Soient Φ, Φ', P, P' les *quatre points cardinaux caractéristiques* (*fig.* 29). La lentille unique équivalente sera connue si l'on fixe, d'une part, les distances

Fig. 29.



$$h_1 = AP, \quad h_2 = BP'$$

des points principaux aux pôles A et B des surfaces correspondantes, et, d'autre part, les rayons de courbure R et R′ de ces mêmes surfaces. Or on a trouvé précédemment

$$(1) \qquad h_1 = \varepsilon \frac{R}{n(R+R') - \varepsilon(n-1)}$$

et

$$(2) \qquad h_2 = \varepsilon \frac{R'}{n(R+R') - \varepsilon(n-1)},$$

et aussi, pour la distance focale φ,

$$(3) \qquad \varphi = \frac{nRR'}{(n-1)[n(R+R') - \varepsilon(n-1)]},$$

avec la condition évidente

$$(4) \qquad \varepsilon = h_1 + h_2 + \Delta,$$

ε et Δ ayant les significations connues.

Voilà quatre équations entre les six quantités h_1, h_2, R, R′, ε, n; il y a donc indétermination. Si l'on fixe deux d'entre elles, les quatre autres s'en déduiront. On peut ainsi prévoir qu'il y aura une *infinité* de solutions, c'est-à-dire une *infinité* de lentilles de courbures, d'épaisseurs et de matières différentes, équivalentes au système résultant.

Il y a deux cas à considérer, si l'on se borne aux applications.

1° *La matière de la lentille, c'est-à-dire l'indice de réfraction n, est déterminée; c'est du crown ou du flint, par exemple.*

Cherchons la relation qui unit h_1 et h_2; pour cela, éliminons R, R′, ε entre les quatre équations précédentes. Les trois

premières peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$h_1 = \varepsilon\varphi \frac{n-1}{nR'},$$

$$h_2 = \varepsilon\varphi \frac{n-1}{nR},$$

$$\varphi = \frac{1}{n} \frac{\frac{nR}{n-1} \frac{nR'}{n-1}}{\frac{nR}{n-1} + \frac{nR'}{n-1} - \varepsilon}.$$

Actuellement, posons

$$\frac{nR}{n-1} = u, \quad \frac{nR'}{n-1} = u';$$

il vient

(1′) $$h_1 = \frac{\varepsilon\varphi}{u'},$$

(2′) $$h_2 = \frac{\varepsilon\varphi}{u},$$

(3′) $$\varphi = \frac{1}{n} \frac{uu'}{u + u' - \varepsilon}.$$

L'élimination de u, u', ε est maintenant facile entre les équations (1′), (2′), (3′), (4); on arrive finalement à l'équation

(5) $$(n-1)\varphi(h_1 + h_2) - nh_1h_2 = \varphi\Delta.$$

Si l'on assigne arbitrairement la valeur de h_1, on déduit h_2 par l'égalité suivante :

$$h_2 = \frac{\varphi[\Delta - (n-1)h_1]}{(n-1)\varphi - nh_1}.$$

Au point de vue géométrique, si l'on considère h_1 et h_2

comme les coordonnées courantes d'une ligne, cette équation (5) représente une *hyperbole équilatère* [1].

On obtient ensuite les rayons de courbure R et R' au moyen des formules

$$R = \frac{\varepsilon}{h_2}\,\frac{n-1}{n}\,\varphi,$$

$$R' = \frac{\varepsilon}{h_1}\,\frac{n-1}{n}\,\varphi.$$

Il serait intéressant de discuter la forme de la lentille équivalente suivant la grandeur et le signe du paramètre h_1, c'est-à-dire suivant la position du point A par rapport au premier point nodal. Nous laissons au lecteur le soin d'entreprendre cet exercice utile.

2° *L'épaisseur et la forme de la lentille sont données, ainsi que la position de ses faces relativement aux points nodaux : on demande l'indice de réfraction de la substance qui doit constituer cette lentille.*

Ici la solution n'est plus indéterminée. L'indice cherché se déduira immédiatement de la formule

$$h_1 = \varepsilon\varphi\,\frac{n-1}{nR'}$$

ou

$$h_2 = \varepsilon\varphi\,\frac{n-1}{nR},$$

d'où

$$n = \frac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon\varphi - h_1 R'} = \frac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon\varphi - h_2 R}.$$

Le calcul de l'indice se présente, dans l'étude physique de

---

[1] De Lisleferme, *Journal de Physique*.

l'œil, quand on veut assigner une valeur *schématique* à l'action réfringente du cristallin. On sait que cette lentille organique peut être considérée comme un double assemblage de lentilles concaves-convexes, à distance focale négative, embrassant un noyau central à peu près sphérique. La densité et par suite l'indice de réfraction des couches successives vont en croissant progressivement depuis la périphérie jusqu'au centre. Comme on ne connaît pas la loi de variation du pouvoir réfringent, il est impossible de calculer directement avec exactitude la marche des rayons lumineux dans le cristallin. Pour éviter cette difficulté, Helmholtz procéda le premier à la mensuration directe des éléments cardinaux du cristallin, à l'aide de son *ingénieux ophtalmomètre,* et il fut naturellement conduit à rechercher l'indice de la lentille, de matière homogène, qui aurait mêmes foyers et mêmes nœuds que le cristallin, qui aurait sa forme et ses dimensions, et qui occuperait rigoureusement sa place dans le système optique de l'œil. Helmholtz a appelé cet élément *indice de réfraction total.*

Cet indice est différent de l'*indice moyen* des couches successives et aussi de l'*indice du noyau.*

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES ÉLÉMENTS CARDINAUX D'UN SYSTÈME OPTIQUE.

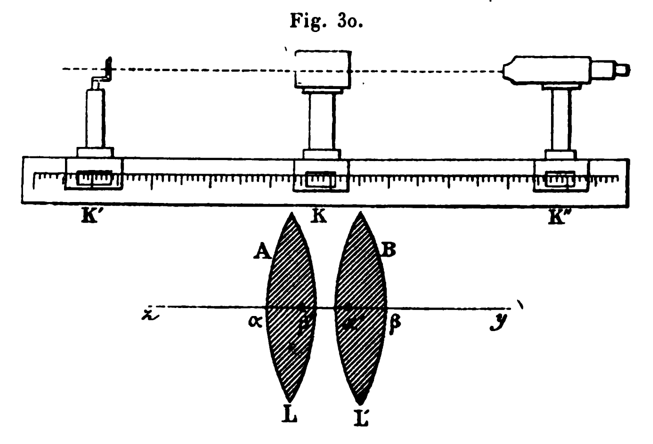
Il s'agit de fixer, sur l'axe principal du système, la position de quatre points : les deux *points focaux* et les deux *points principaux* ou *nodaux.*

Nous déterminerons d'abord la position des foyers principaux ou des plans focaux principaux.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un système de deux lentilles centrées sur le même axe, comme dans un objectif double de Photographie.

Nous emploierons une règle horizontale, analogue au banc de diffraction (*fig.* 30), pourvue d'une division en demi-millimètres dont le zéro, pris pour origine des distances, est situé en son milieu. Sur cette règle peuvent glisser divers curseurs K, K′, K″, portant des échancrures dont la tranche, amincie en biseau, fait office de vernier par rapport aux divisions de la règle. L'un de ces curseurs K soutient le système

Fig. 30.



des lentilles, l'autre K′ sert de support à un micromètre gravé sur verre, le troisième K″ porte une lunette qui sert à viser le micromètre à travers l'assemblage des verres.

On amène le support intermédiaire K au zéro des divisions de la règle, on établit le contact du micromètre avec le sommet de la surface antérieure du premier verre L (*fig.* 30), puis on note la division λ_0 donnée par le vernier du curseur mobile K′. Cela fait, on recule ce curseur jusqu'à ce qu'on voie nettement le trait central à travers la lunette, *préalablement ajustée pour les objets situés à l'infini;* soit λ_1 la nouvelle lecture du vernier. Quand la condition précédente est réalisée, le micromètre est dans le premier plan focal du système, et la

quantité linéaire $\lambda_1 - \lambda_0 = \psi$ dont on a dû reculer le curseur mobile mesure la distance de ce plan au sommet de la surface antérieure.

Ensuite, on retourne le système optique bout pour bout, et l'on fait les deux lectures analogues λ'_0 et λ'_1. On a alors $\lambda'_1 - \lambda'_0 = \psi'$ pour la distance du second plan focal à la surface postérieure du dernier verre.

D'ailleurs, la distance D des surfaces extrêmes pourra toujours être relevée avec précision à l'aide d'un compas d'épaisseur.

Mesurons maintenant la *longueur focale principale,* c'est-à-dire la distance de chaque plan focal au plan principal correspondant.

On effectue aujourd'hui très commodément cette mesure à l'aide du procédé suivant, dû à M. Cornu (¹), et dont je vais développer le principe avec quelque détail.

Les distances d et d' de deux foyers conjugués quelconques aux foyers principaux correspondants sont liées entre elles *par l'équation simplifiée de Newton :*

$$dd' = \varphi^2.$$

La position des points focaux étant connue par les observations antérieures, il suffit, d'après cette formule, de placer un objet à une distance d d'un des points focaux et de déterminer la distance d' du foyer conjugué à l'autre point focal : le produit dd' donne le carré φ^2 de la longueur focale principale cherchée. Mais il faut que d et d' soient déterminés avec beaucoup de précision, parce que *l'erreur relative commise sur la distance focale est la moyenne des erreurs relatives com-*

(¹) *Journal de Physique,* t. VI.

mises sur les coordonnées d et d' des foyers conjugués. Effectivement, si l'on commet une erreur δd sur d et $\delta d'$ sur d', on commet une erreur $\delta\varphi$ sur φ, telle que

$$(d + \delta d)(d' + \delta d') = (\varphi + \delta\varphi)^2$$

ou approximativement

$$d\,\delta d' + d'\,\delta d = 2\varphi\,\delta\varphi,$$

d'où

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta d}{d} + \frac{\delta d'}{d'}\right).$$

En outre, il faut que ni d ni d' ne soient très petits, car l'erreur relative augmente rapidement, toutes choses égales d'ailleurs, avec la petitesse de d et d'.

On peut considérer les deux erreurs δd et $\delta d'$ comme égales entre elles et à l'erreur inévitable $\delta\lambda$ commise dans la détermination des plans focaux. On peut donc écrire l'expression précédente

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} = \frac{\delta\lambda}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}\right)$$

ou

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} = \frac{\delta\lambda}{2}\,\frac{x + x'}{\varphi^2}.$$

L'erreur relative sera *minima* si les distances focales conjuguées sont égales entre elles. C'est pourquoi, dans le focomètre de Silbermann, on choisit des points conjugués situés au double de la distance focale principale.

Mais M. Cornu fait remarquer avec raison que cette disposition a l'inconvénient pratique d'exiger, en maintes circonstances, un développement trop étendu de la règle divisée, au moins égal au quadruple de la distance focale. Cet inconvénient est écarté et les conditions théoriques sont satisfaites

si l'on choisit *les sommets des surfaces extérieures du système optique donné et leurs images observées à travers la surface opposée.*

A cet effet, on trace un trait noir au sommet α de la face antérieure A de la lentille L, et l'on mesure la distance ε' de son image α' (vue à travers la surface postérieure B de la lentille L') au sommet β de cette dernière surface, où l'on trace également un trait noir.

On a évidemment la relation

$$\psi(\psi' + \varepsilon') = \varphi^2.$$

En retournant le système, on observe β à travers la surface A, c'est-à-dire son image β'; on mesure la distance $\alpha\beta' = \varepsilon$, et l'on a une nouvelle équation

$$\psi'(\psi + \varepsilon) = \varphi^2.$$

On détermine ainsi de deux manières la distance focale principale φ, ce qui fournit une précieuse vérification.

Pour obtenir ε et ε', on substitue à la lunette, ajustée sur le curseur K'', un microscope à long foyer, muni d'un réticule. On déplace le curseur de façon à amener successivement sur le réticule l'image du trait β, puis l'image conjuguée α' du trait α : la différence des lectures du curseur dans ces deux positions donne la longueur ε'. Puis on retourne le système optique bout pour bout, et l'on fait coïncider avec le plan du réticule l'image du trait α et l'image conjuguée β' du trait β : la différence des lectures fournit ε.

Il résulte de ces déterminations que l'on connaît tous les éléments cardinaux du système, à savoir : la distance focale principale φ, la distance de chaque point principal ou nodal au pôle de la surface correspondante $h_1 = \varphi - \psi$ et $h_2 = \varphi - \psi'$,

et enfin l'*interstice des nœuds,* qui a pour expression

$$\Delta = \psi + \psi' + D - 2\varphi.$$

Quand il s'agissait de lentilles de petites dimensions, comme le cristallin humain, Helmholtz a fait usage de son ophtalmomètre. Il employait comme objet une fente lumineuse, d'une largeur connue s, et mesurait les largeurs σ et σ_1 de l'image obtenue pour l'objet placé aux distances p et p_1 de la face antérieure de la lentille. On obtient les deux relations suivantes, démontrées précédemment :

$$\frac{s + \sigma}{\sigma} = \frac{p + h_1}{\varphi},$$

$$\frac{s + \sigma_1}{\sigma_1} = \frac{p_1 + h_1}{\varphi}.$$

On en déduit φ et h_1. Pour φ, on trouve

$$\varphi = (p_1 - p)\frac{\sigma\sigma_1}{s(\sigma - \sigma_1)},$$

et pour h_1

$$h_1 = \frac{p_1\sigma_1(s + \sigma) - p\sigma(s + \sigma_1)}{s(\sigma - \sigma_1)}.$$

En retournant le cristallin, on obtient, par une relation analogue, la valeur de h_2.

CHAPITRE V.

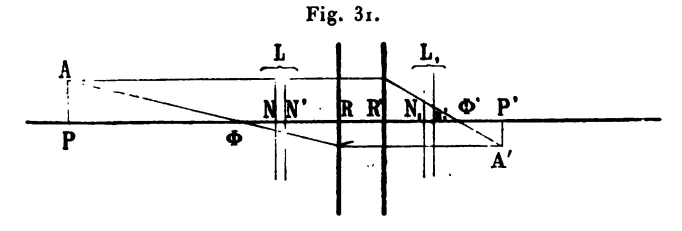
INSTRUMENTS D'OPTIQUE FONDÉS SUR LES ASSOCIATIONS DE LENTILLES.

Les instruments d'Optique consistent essentiellement en des associations de lentilles, placées dans l'air et centrées sur le même axe.

Nous allons leur appliquer le principe de réduction exposé plus haut.

Soient (*fig.* 31) deux lentilles L et L_1, f_1 et f_2 leurs distances focales, $d = N'N_1$ la distance des nœuds. Les éléments

Fig. 31.



fondamentaux du système résultant sont les deux points principaux R et R' et les deux points focaux Φ et Φ'. Leur position sur l'axe commun est définie par les longueurs

$$NR = h_1, \quad N'_1R' = h_2, \quad R\Phi = R'\Phi' = \varphi.$$

On a

$$h_1 = d\frac{f_1}{f_1+f_2-d},$$

$$h_2 = d\frac{f_2}{f_1+f_2-d},$$

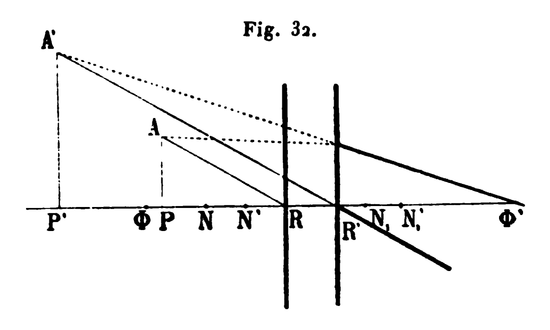
$$\varphi = \frac{f_1 f_2}{f_1+f_2-d}.$$

On obtiendra l'image $A'P'$ par les constructions ordinaires effectuées sur la lentille unique RR'. Cela posé, passons en revue les principaux instruments.

I. — Loupe double ou doublet.

Dans la loupe, l'image est virtuelle et reportée à la distance V

Fig. 32.



de la vision distincte pour l'œil de l'observateur placé au second point nodal N'_1 de la lentille L_1 (*fig*. 32).

On a pour l'expression du grossissement linéaire

$$G = \frac{A'P'}{AP} = \frac{P'R'}{PR}.$$

Mais les points P et P' sont conjugués et il en résulte la relation

$$\frac{1}{PR} - \frac{1}{P'R'} = \frac{1}{\varphi},$$

d'où

$$\frac{P'R'}{PR} = 1 + \frac{P'R'}{\varphi}.$$

Sur la figure, on trouve

$$P'R' = P'N'_1 - R'N'_1 = V - h_2.$$

En remplaçant φ et h_2 par leurs valeurs, il vient

$$G = \frac{V(f_1 + f_2 - d) + f_2(f_1 - d)}{f_1 f_2}.$$

On connaît, dans la pratique, deux sortes de doublets :

1° **L'oculaire de Ramsden.** — Dans cette combinaison, on prend

$$f_1 = f_2 \quad \text{et} \quad d = \frac{2}{3} f_1,$$

et l'on a pour la valeur du grossissement G,

$$G = \frac{4V + f_1}{3 f_1}$$

ou simplement, comme f_1 est toujours très petit par rapport à V,

$$G = \frac{4}{3} \frac{V}{f_1}.$$

2° **Le doublet ordinaire,** pour lequel on a

$$f_2 = 3 f_1, \quad d = \frac{1}{2} f_2,$$

ce qui donne

$$G = \frac{5}{6} \frac{V}{f_1} - \frac{1}{2}$$

ou simplement

$$G = \frac{5}{6} \frac{V}{f_1}.$$

Cela revient à dire que, dans l'expression générale du grossissement linéaire, le second terme est très petit par rapport au premier. On a donc abréviativement

$$G = \frac{V(f_1 + f_2 - d)}{f_1 f_2}.$$

Actuellement, appelons F_1, F'_1 les points focaux antérieur et postérieur du premier verre, F_2, F'_2 ceux du second; on voit aisément que f_1+f_2-d est égal à l'écartement δ des deux foyers F'_1, F_2. On peut écrire définitivement

$$G = \frac{V\delta}{f_1 f_2}.$$

Remarque.

Quand la distance de vision distincte augmente, on rapproche l'image du foyer antérieur; pour l'œil infiniment presbyte, le point P devrait coïncider avec le point Φ. Toutefois, il est utile de remarquer qu'en posant $P\Phi = \varepsilon$, le produit $V\varepsilon$ tend vers une limite finie quand ε tend vers zéro et consécutivement V vers l'infini. Effectivement, on a

$$V\varepsilon = \varphi(\varphi - \varepsilon),$$

et par suite

$$\lim V\varepsilon = \varphi^2.$$

II. — Microscope composé.

Il est forme par la réunion d'un système convergent, appelé *objectif*, donnant une image réelle, agrandie et renversée de l'objet, et d'un second système convergent, appelé *oculaire*, fonctionnant par rapport à cette image réelle comme une loupe.

La *fig.* 33 indique la marche des rayons.

Dans ce nouvel assemblage de deux verres, l'expression du grossissement est toujours

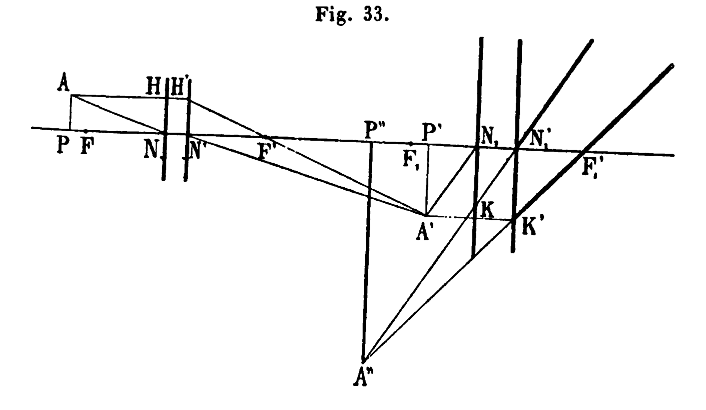
$$G = \frac{V\delta}{f_1 f_2} = \frac{V}{f_1} \times \frac{\delta}{f_2}.$$

Or, $\frac{V}{f_1}$ est le grossissement de l'oculaire et $\frac{\delta}{f_2}$ est le grossissement de l'objectif, car, en consultant la figure, on trouve, par les deux triangles rectangles semblables H′N′F′ et A′F′P′,

$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{P'F' \text{ ou } F_1F'}{N'F'} = \frac{\delta}{f_2}.$$

Ainsi, dans le microscope composé, *le grossissement linéaire*

Fig. 33.



est égal au produit du grossissement de l'objectif par le grossissement de l'oculaire.

III. — Lunette astronomique.

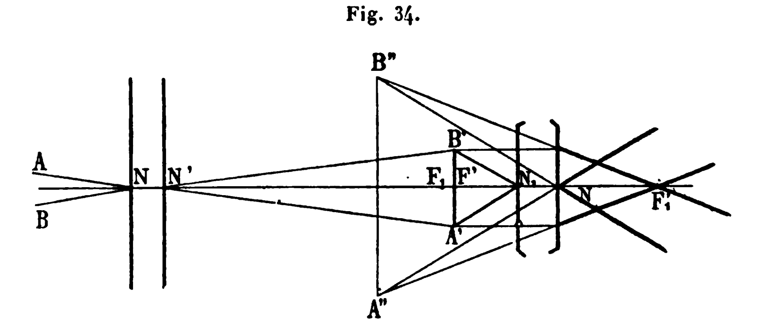
La lunette astronomique se compose : 1° d'un *objectif convergent,* donnant une image réelle et renversée de l'objet; 2° d'un *oculaire convergent,* faisant fonction de loupe et donnant une image virtuelle qui est contemplée par l'œil. L'ouverture et par suite la distance focale de l'objectif sont considérables; l'oculaire a une ouverture et une distance focale beaucoup plus petites. Dans le microscope composé, le

contraire se présente. La *fig.* 34 indique la marche des rayons venant d'un objet éloigné.

Dans les instruments d'Optique qui s'emploient pour faciliter la vision d'objets éloignés, tels que les *lunettes* et les *télescopes,* on n'a plus en vue le *grossissement linéaire,* comme dans les appareils précédents, mais bien le *grossissement angulaire,* c'est-à-dire le rapport du diamètre apparent de l'image au diamètre apparent de l'objet, et ce rapport change quand on fait varier les positions relatives de l'objet et de l'oculaire par rapport à l'objectif.

Si l'on veut que le grossissement soit *vraiment spécifique*

Fig. 34.



du système, il faut ajuster la lunette de telle sorte que les rayons qui entrent parallèles en sortent encore parallèles, c'est-à-dire il faut que la lunette soit disposée pour la vision nette d'objets infiniment éloignés, à l'aide d'un œil infiniment presbyte. Alors le second plan focal de l'objectif coïncide avec le premier plan focal de l'oculaire; $\delta = 0$, et les points principaux et focaux du système résultant sont à l'infini. Il semble que dans ce cas il y ait échec à la méthode de Gauss : il n'en est rien, car remarquons que, dans cet état d'ajustement de la lunette, *le grossissement angulaire est l'inverse du gros-*

sissement linéaire, ou

$$\frac{f_1 f_2}{V\delta}.$$

Or on a reconnu plus haut que, V tendant vers l'infini et δ vers zéro, le produit $V\delta$ prenait pour valeur limite f_1^2. Il vient donc, pour le grossissement spécifique cherché,

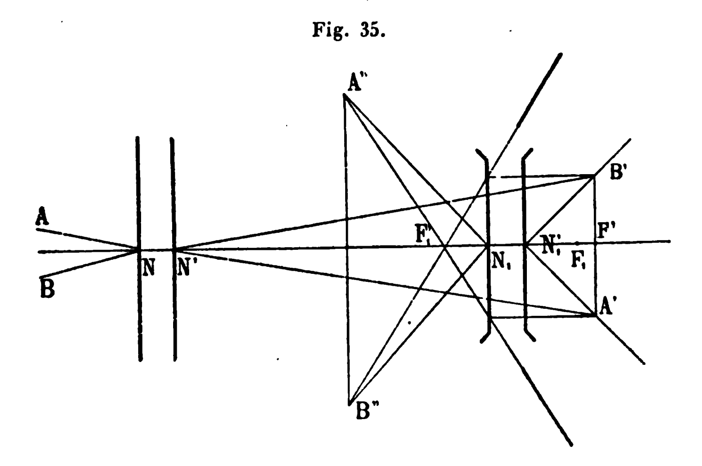
$$\frac{f_2}{f_1}.$$

C'est le rapport de la distance focale de l'objectif à celle de l'oculaire.

IV. — Lunette de Galilée.

La lunette de Galilée se compose d'un objectif convergent et d'un oculaire divergent. Ce dernier est interposé entre

Fig. 35.



l'objectif et l'image réelle et renversée engendrée par l'objectif. Pour la vue ordinaire, le point focal postérieur de l'oculaire ou premier point focal est un peu en deçà de l'image.

de telle sorte que les rayons qui convergent vers elle sont rendus divergents et vont former une seconde image virtuelle, renversée par rapport à la première, et par conséquent droite par rapport à l'objet.

La *fig.* 35 permet de suivre aisément la marche des rayons qui aboutissent à l'image définitive.

Pour trouver cette dernière, il suffit de considérer l'image A'B' comme une image virtuelle par rapport à l'oculaire, et nous avons appris le tracé graphique approprié à la solution de ce problème (page 55).

Au point de vue du grossissement angulaire spécifique, tout ce qui a été dit de la lunette astronomique s'applique à la lunette de Galilée. Cet élément a pour valeur

$$\frac{f_2}{f_1},$$

le rapport des distances focales de l'objectif et de l'oculaire.

CHAPITRE VI.

EXTENSION DE LA THÉORIE DE GAUSS AUX MIROIRS SPHÉRIQUES CONCAVES OU CONVEXES ET AUX ASSOCIATIONS DE CES MIROIRS CENTRÉS.

Dans le Chapitre I de la *Théorie des lentilles,* nous avons montré que les formules des miroirs se déduisaient immédiatement de celles relatives à une seule surface réfringente, en remplaçant dans ces dernières l'indice relatif $\frac{n'}{n}$ par -1. Nous avons dit que les raisonnements, constructions et relations étaient analogues, et nous avons laissé au lecteur le soin de suivre le parallélisme de ces deux théories de la formation des images par réfraction et par réflexion ([1]).

Nous nous proposons d'aller plus loin encore et d'étendre la théorie de Gauss à une association quelconque de miroirs centrés.

I. — RÉFLEXION SUR UNE SEULE SURFACE.

Marche des rayons lumineux. Points ou foyers conjugués. — Soit IAK la section diamétrale d'une calotte sphérique dont le centre est en O. Le centre de figure A s'appelle le *pôle* et la droite indéfinie AO est l'*axe principal* (*fig.* 36). Le miroir est *concave* ou *convexe,* suivant qu'il reçoit la lumière incidente du côté de sa concavité ou de sa convexité.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un miroir concave.

([1]) Ici nous suivons ce parallélisme et dans l'exposition des faits et dans le discours.

Un point P placé sur l'axe enverra des rayons dans tous les sens; considérons un de ces rayons PI tombant sur le miroir, et cherchons la direction du rayon réfléchi correspondant IP'. A cet effet, menons au point d'incidence I la normale, laquelle se confond avec le rayon OI de la calotte sphérique; puis construisons un angle de réflexion OIP', égal à l'angle d'incidence OIP.

Appelons α, α', ω les angles en P, P', O; l'angle ω est extérieur au triangle PIO, et par conséquent égal à la somme des angles intérieurs. Ainsi

$$\omega = \alpha + i;$$

de même, on a

$$\alpha' = \omega + i,$$

d'où

$$\alpha + \alpha' = 2\omega.$$

On mesurera les trois angles α, α', ω au moyen des trois longueurs $AP = p$, $AP' = p'$ et $AO = R$, car, si nous abaissons la perpendiculaire IH sur l'axe, nous pourrons écrire, en substituant aux angles leurs tangentes et négligeant la longueur infiniment petite AH,

$$\alpha = \frac{IH}{p}, \quad \alpha' = \frac{IH}{p'}, \quad \omega = \frac{IH}{R},$$

d'où

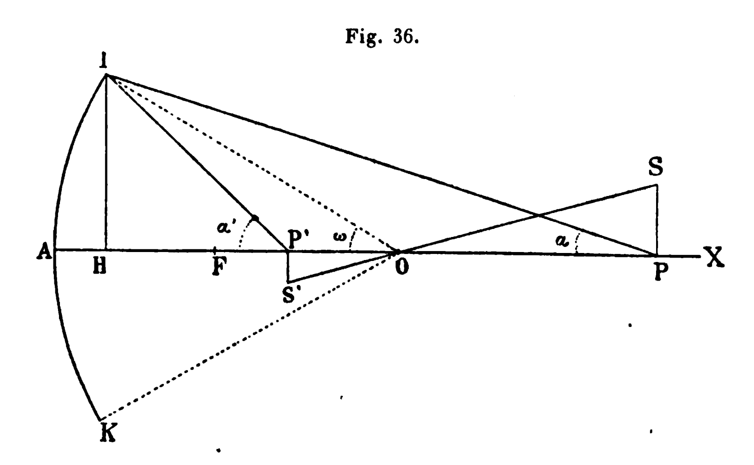
$$(1) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}.$$

On suppose que l'*amplitude* du miroir, c'est-à-dire l'angle IOK, ne comprend qu'un petit nombre de degrés, et en outre que les angles d'incidence sont fort petits.

L'équation (1) donne pour p' une valeur indépendante de la direction du rayon incident. On en conclut que tous les

rayons partis d'un même point P concourent après réflexion en un même point P′, ce qu'on exprime encore en disant que des rayons *homocentriques* qui se réfléchissent sur une surface sphérique sous des angles d'incidence très petits restent *homocentriques* après la réflexion. Réciproquement, si le

Fig. 36.



point lumineux se trouve en P′, les rayons qui en émanent se réuniront en P, en vertu de la loi de réciprocité. Les deux points P et P′ sont dits *points* ou *foyers conjugués;* ce sont les *images* l'un de l'autre.

Remarque.

Dans l'équation (1), p et p' sont les distances respectives du pôle A au *point-objet* et au *point-image*. Nous regarderons comme *positives* les distances p, p' comptées à partir du pôle A vers le côté d'où vient la lumière, et comme *négatives* celles portées dans la direction opposée. Nous attribuerons au rayon R du miroir le signe + ou le signe —, selon qu'il

tournera sa concavité ou sa convexité vers les rayons incidents.

Notre formule fait voir que la distance de l'image P′ au pôle A dépend de la distance à ce pôle du point lumineux P. A mesure que celui-ci s'éloigne du pôle dans le sens AX, son conjugué P′, *marchant en sens contraire,* s'approche de la surface réfléchissante. Lorsque le point lumineux a reculé à l'infini, les rayons qui en partent, LI, FA, SK, sont parallèles entre eux et à l'axe principal, et leur point de concours, après la réflexion, est situé en F (*fig.* 37). Ce point F, où viennent se réunir les rayons réfléchis correspondant à des rayons incidents parallèles à l'axe principal, s'appelle *foyer principal* ou *point focal* du miroir. Sa distance f à la surface réfléchissante est la *longueur focale.* Elle se déduit de la formule (1) pour $p = \infty$; on trouve

$$f = \frac{R}{2}.$$

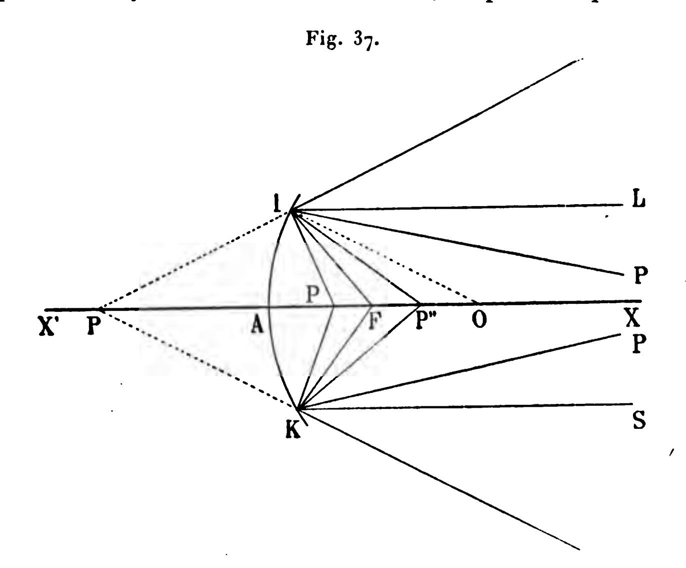
Ainsi, *le point focal se trouve en* F, *au milieu du rayon de courbure* AO, *à égale distance du centre de courbure et du pôle de la surface réfléchissante.*

Si le faisceau conique incident devient convergent, de telle sorte que les prolongements géométriques des rayons et non les rayons eux-mêmes concourent en un point situé à gauche du miroir, sur AX′, le point lumineux est dit *virtuel.* Dans ce cas, l'image P′ est formée par des rayons qui vont toujours réellement s'y réunir; elle est dite *réelle* et parcourt l'intervalle compris entre le foyer principal F et le pôle A, pendant que l'objet virtuel P se rapproche de l'infini postérieur ou négatif jusqu'à la surface. Ces derniers résultats se déduisent de l'équation (1), dans laquelle on attribue à p des valeurs négatives, depuis $-\infty$ jusqu'à o.

Supposons, au contraire, que le point lumineux situé sur AX s'avance vers le sommet A; son conjugué s'en éloignera de plus en plus dans le sens AX, jusqu'à ce que finalement ces deux points se confondent : ce qui arrivera quand le point lumineux sera au centre de courbure O. Ce résultat était facile à prévoir, puisque dans ce cas tous les rayons incidents sont normaux à la surface du miroir et se réfléchissent nécessairement sur eux-mêmes.

Si le point lumineux, se rapprochant toujours du pôle A, passe *en deçà* du centre de courbure, le point P′ passe *au*

Fig. 37.



delà de ce centre et marche vers l'infini positif, qu'il atteint quand le point P est superposé au foyer principal F.

Enfin, si le point lumineux se rapproche encore davantage de la surface réfléchissante, les rayons qui en partent seront divergents après la réflexion, et, au lieu de se réunir à droite de la surface IAK, ils sembleront partir d'un point situé à

gauche; l'image sera *virtuelle* et reviendra de l'infini négatif au pôle, où elle se confondra avec l'objet.

La discussion de notre formule fondamentale conduit aisément à ces conclusions.

En résumé, *les foyers conjugués dans les miroirs marchent toujours en sens contraires.*

La formule (1), dans laquelle on introduit la longueur focale, devient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Prenons maintenant pour origine des distances le foyer principal F; il suffit de poser (*fig.* 36) $PF = l$, $P'F = l'$ et par suite

$$p = f + l, \quad p' = f + l';$$

substituant dans la formule (2), on trouve

$$ll' = f^2.$$

C'est la formule *simplifiée,* ou *formule de Newton.* Elle indique que les deux points conjugués sont toujours du même côté par rapport au foyer principal, puisque les longueurs d et d' doivent toujours être de même signe.

En outre, elle conduit à une construction simple de ces foyers conjugués.

Sur AO comme diamètre, décrivons une circonférence (*fig.* 38). Deux cas peuvent se présenter, selon que le point est extérieur ou intérieur au *cercle focal.*

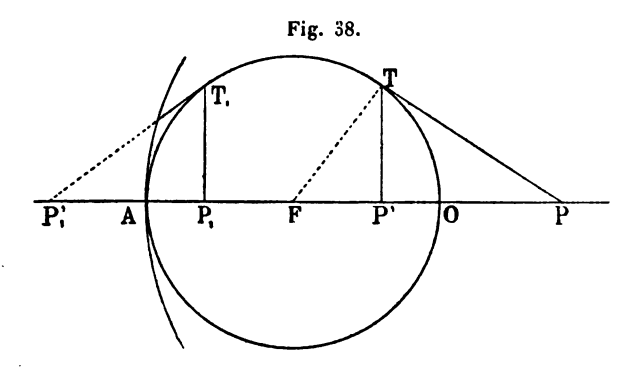
Si le point P est extérieur, menons une tangente PT au cercle et projetons le point T de tangence en P′. Dans le triangle rectangle PTF, on a

$$\overline{FT}^2 = f^2 = FP'.FP = ll'.$$

Le point P′ est donc le conjugué du point P.

Si le point P est intérieur au cercle focal, on effectue la construction en sens inverse. On élève la perpendiculaire $P_1 T_1$ et l'on mène la tangente $T_1 P'_1$.

Fig. 38.



On a trouvé plus haut, pour la longueur focale f,

$$f = \frac{R}{2}.$$

Si la lumière incidente tombe sur une surface convexe, autrement dit, si le miroir est convexe au lieu d'être concave, il faut changer R en $-R$; la distance focale est négative; le point focal est *virtuel* et situé derrière la surface réfléchissante.

Plans conjugués. — Un point S (*fig.* 36), pris en dehors de l'axe principal, est par rapport à la surface dans les mêmes conditions que le point P; l'image S′ se fait sur la droite SO et les distances respectives de ces deux points conjugués S et S′ à la surface réfléchissante sont liées entre elles par la même loi que celle qui détermine les positions relatives des foyers conjugués sur l'axe principal. Si $OS = OP$, on aura de même $OS' = OP'$. Donc tous les points d'une calotte sphé-

rique ayant pour rayon OS ont pour conjugués les points d'une seconde calotte sphérique ayant pour rayon OS′. Ces deux calottes ont même axe OA, et, comme elles ont, par hypothèse, une faible ouverture, elles se confondent avec leurs plans tangents, qui sont perpendiculaires à l'axe aux points P et P′. D'après cela, tout point de l'un de ces plans a son conjugué ou son image dans le second, sur une ligne appelée *axe secondaire* ou *ligne de direction,* qui passe par le centre de courbure de la surface. Les images d'objets couchés dans ces plans sont semblables, et leur centre de similitude est en O. Les plans menés ainsi perpendiculairement à l'axe principal par les points conjugués ont reçu la dénomination de *plans conjugués.*

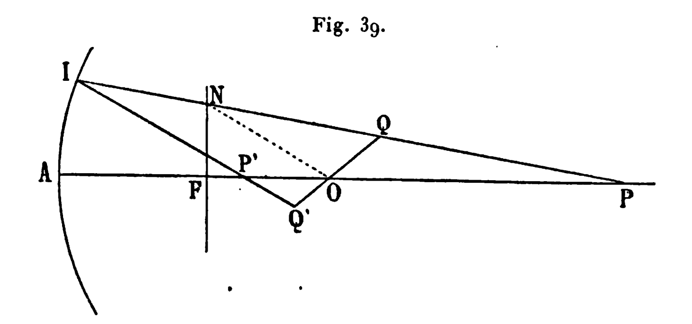
Plan focal. — Élevons au point focal F un plan FN, perpendiculaire à l'axe principal : nous aurons le *plan focal.* Si nous ne considérons que les parties voisines de F, ce plan jouit d'une propriété importante (*fig.* 39) : *Tout point lumineux qui y est contenu enverra sur la surface réfléchissante des rayons qui, après la réflexion, se propageront parallèlement à l'axe secondaire relatif au point considéré.*

Construction des rayons conjugués. — Cette propriété du plan focal est utile à connaître, car elle nous permet de construire le rayon réfléchi correspondant à un rayon incident quelconque, et, en particulier, de déterminer géométriquement la position du foyer conjugué d'un point lumineux situé sur l'axe principal.

Soit, par exemple, le rayon incident PI; il s'agit de trouver le rayon réfléchi correspondant; PI coupe le plan focal en N. On peut regarder le rayon PI comme appartenant à un cône

dont le sommet est en N; or nous savons que tout rayon issu d'un point du plan focal prend, en se réfléchissant, une direction parallèle à l'axe secondaire de ce point. Il suffit donc de tracer cet axe secondaire NO et de lui mener par le point d'incidence I une parallèle IP′. Cette dernière droite est le rayon réfléchi cherché, et P′ est le conjugué de P.

Fig. 39.



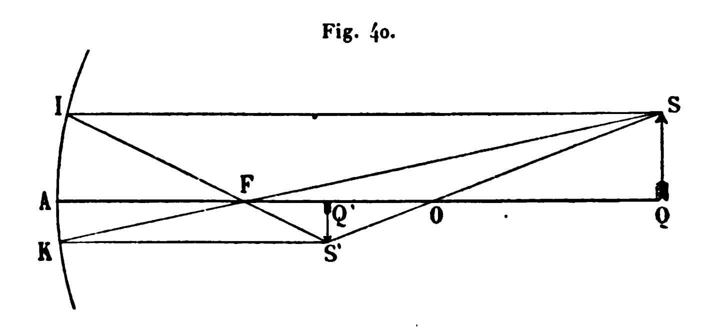
Cette construction s'applique aussi bien au cas où le point est hors de l'axe : l'image de Q est en Q′ sur l'axe secondaire QO.

Construction des images. — Pour construire l'image d'un objet, il suffit de construire l'image de ses différents points. On vient de voir comment s'obtient l'image d'un point situé sur l'axe principal ou en dehors de cet axe. Les explications précédentes conduiraient donc immédiatement au tracé graphique de l'image d'un objet quelconque et dans les circonstances les plus générales. Toutefois, il nous paraît utile d'indiquer cette autre manière de construire l'image d'un point lumineux placé en dehors de l'axe principal (*fig.* 40).

Menons le rayon SI, parallèle à l'axe principal; le rayon réfléchi correspondant est IF. Joignons ensuite le point S au

point focal; le rayon SF rencontre la surface réfléchissante en K, et se réfléchit parallèlement à l'axe principal, suivant KS'. Les deux rayons réfléchis IS', KS' se coupent en S', et

Fig. 40.



nous savons que tous les autres s'y coupent. Donc S' est l'*image* ou le *conjugué* de S.

L'axe secondaire SO, relatif au point S, doit aussi passer par l'image S'; de là deux autres manières de déterminer ce dernier point.

Enfin, d'après la propriété des plans conjugués, si l'on prend pour objet la flèche SQ, perpendiculaire à l'axe principal, son image aura la même direction et s'obtiendra en menant S'Q' perpendiculaire à l'axe.

Grandeur de l'image. — Posons $SQ = O$, $S'Q' = I$; les deux triangles rectangles S'OQ' et SOQ sont semblables et donnent

$$\frac{I}{O} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{f - l'}{l - f},$$

et, à cause de la relation $ll' = f^2$, il reste

$$\frac{I}{O} = \frac{f}{l}.$$

Telle est l'expression du *grossissement linéaire* produit par une surface réfléchissante.

Nous avons dit plus haut que l'image de chaque point de l'objet se trouve dans le plan conjugué et sur la ligne joignant ce point au centre de la sphère, qui est ainsi un *centre de similitude.* Si donc l'image et l'objet sont de part et d'autre du centre, l'image sera *renversée;* elle sera *droite* dans le cas contraire.

Il y a deux cas à considérer, suivant que le miroir est concave ou convexe.

1° *Miroir concave.*

L'objet SQ est infiniment éloigné; l'image S′Q′, infiniment petite, est située dans le plan focal.

A mesure que SQ se rapproche, l'image s'éloigne de la surface et grandit, et, quand l'objet est au centre de courbure, l'image réelle et renversée est de même grandeur que l'objet.

Quand SQ est situé entre le centre de courbure et le plan focal, l'image S′Q′ est plus grande que SQ et passe à droite du centre de courbure; elle grandit en s'éloignant, et devient infiniment grande et infiniment éloignée quand l'objet est sur le plan focal.

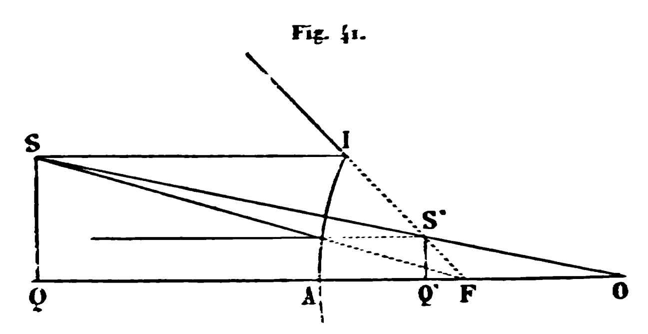
Lorsque l'objet est compris entre le plan focal et le miroir, l'image est située derrière le miroir, virtuelle, droite et plus grande que l'objet; elle se superpose à l'objet quand celui-ci est sur le miroir.

Enfin, quand l'objet devient *virtuel* et passe derrière le miroir, l'image est *réelle,* plus petite que l'objet, reste droite, et est intercalée entre le miroir et le plan focal.

2° Miroir convexe.

Quand SQ est infiniment éloigné, l'image virtuelle est infi-

Fig. 41.

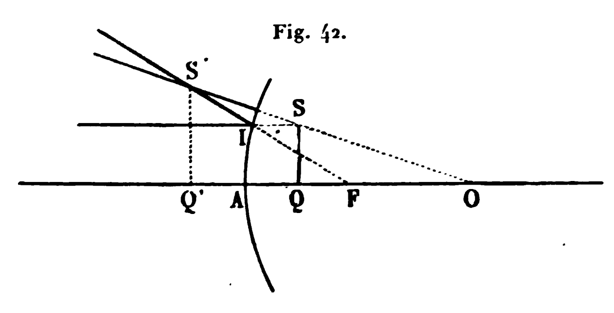


niment petite et contenue dans le plan focal.

Quand l'objet se rapproche du miroir, l'image, toujours virtuelle et droite, s'en rapproche aussi; elle grandit continûment pour devenir égale à l'objet, quand celui-ci est placé sur le miroir (*fig.* 41).

Quand l'objet devient virtuel et se trouve entre le miroir et le plan focal, son image (*fig.* 42) reste droite, devient réelle et

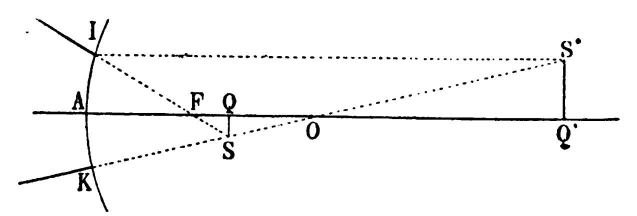
Fig. 42.



plus grande que l'objet, et, quand ce dernier atteint le plan focal, l'image est infiniment grande et infiniment éloignée.

Supposons (*fig.* 43) que l'objet virtuel SQ soit compris entre le plan focal et le centre de courbure; son image vir-

Fig. 43.



tuelle S′Q′ est au delà du centre, plus grande que l'objet et nécessairement renversée; elle est égale à l'objet quand celui-ci occupe le centre de courbure.

Enfin, quand l'objet virtuel est au delà du centre, son image virtuelle, renversée, est plus petite que l'objet et comprise entre le centre et le plan focal.

II. — RÉFLEXION SUR UN NOMBRE QUELCONQUE DE SURFACES SPHÉRIQUES CENTRÉES.

La lumière suit une route plus compliquée quand, au lieu de rencontrer sur son passage une seule surface réfléchissante, elle est ballottée dans un intervalle séparé par des surfaces sphériques douées du poli spéculaire. Nous supposerons que les centres de toutes ces surfaces se trouvent sur une même ligne droite, qu'on appelle l'*axe optique principal* du système. Les systèmes de miroirs dans lesquels cette condition est remplie sont dits *centrés.*

Considérons d'abord le cas le plus simple, réalisé par deux surfaces sphériques placées en regard l'une de l'autre.

Points conjugués. — Nous avons vu, dans le paragraphe

précédent, que la réflexion par une seule surface sphérique transforme un cône de rayons émanant réellement ou virtuellement d'un point lumineux P en un second cône dont les rayons convergent réellement ou virtuellement en un autre point P′, appelé le *conjugué* ou l'*image* de P. La réflexion a-t-elle lieu sur une seconde surface sphérique, le point P′ a, par rapport à cette surface, un point conjugué P″ qui est l'image de P′, et par conséquent de P. Ainsi, des rayons *homocentriques* qui tombent sur le système optique en faisant de petits angles d'incidence avec son axe restent *homocentriques* après chaque réflexion et rejaillissent *homocentriquement* de la dernière surface réfléchissante. Les sommets de ces cônes successifs sont *points conjugués* les uns des autres.

Points focaux. — Il y a aussi à considérer des points focaux. Si le point P, placé sur l'axe optique du système, s'éloigne à l'infini vers la droite, le point P″ tend vers un point Φ′ qui est le *second point focal* du système. Inversement, si le point P″ s'éloigne à l'infini vers la gauche, son conjugué P tend vers un point limite Φ qui est le *premier point focal.*

Plans conjugués. — Quand la lumière incidente émane d'une série de points qui sont tous situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe optique, nous savons qu'après la première réflexion les points conjugués se trouvent de nouveau tous dans un même plan perpendiculaire à l'axe et que leur distribution est géométriquement semblable à celle des premiers points lumineux, le centre de similitude étant le centre de courbure. Il en sera, par conséquent, de même après chacune des réflexions suivantes, et la dernière image sera aussi

géométriquement semblable à la première et placée dans un plan perpendiculaire à l'axe. Le plan de l'objet et celui de l'image extrême sont dits *plans conjugués*.

Plans focaux. — Considérons un plan mené par le second point focal Φ' du système réflecteur, perpendiculairement à l'axe : nous aurons le second plan focal. C'est évidemment le *lieu des points où se croisent après la dernière réflexion les rayons incidents qui sont parallèles aux divers axes secondaires relatifs au premier miroir.*

On reconnaîtrait de la même manière que le plan mené perpendiculairement à l'axe par le premier point focal Φ est le lieu des points où se croisent les rayons incidents qui donnent, après la dernière réflexion, des rayons parallèles.

Plans principaux. — Pour le cas d'une surface réfléchissante unique, nous savons que, dans les limites d'approximation admises [1], le rayon incident et le rayon réfléchi peuvent être considérés comme coupant en un même point I ou K le plan IAK, mené perpendiculairement à l'axe par le pôle A du miroir : cela nous donnait un point du rayon réfléchi, et il suffisait d'en chercher un second pour le déterminer complètement. Lorsque le rayon se réfléchit sur deux ou un plus grand nombre de surfaces, on ne peut avoir un plan unique, doué de la même propriété ; mais on peut démontrer l'existence de deux plans, tout à fait caractéristiques, qui sont les *plans principaux* du système réflecteur. Effectivement, ainsi que nous allons le reconnaître, ces plans sont perpendiculaires à l'axe, et ils sont

---

(1) On substitue à la surface sphérique le plan tangent au pôle; cette approximation convient aussi bien aux surfaces réfléchissantes qu'aux surfaces réfringentes.

rencontrés à la même distance de l'axe, et du même côté, le premier par le rayon incident, le second par le dernier rayon réfléchi.

De la même manière que pour un assemblage de surfaces réfringentes centrées, nous établirons, par un raisonnement géométrique très simple, et l'existence et les propriétés de ces plans.

Pour fixer les idées, nous supposerons les deux miroirs concaves et disposés comme dans le télescope de Grégori.

Soient A et A' les pôles des deux miroirs (*fig.* 44), F et F' leurs points focaux. Traçons une droite indéfinie SS', parallèle à l'axe principal et rencontrant les miroirs en I et en I'. Si SI est un rayon incident, le rayon réfléchi sur le miroir A est IF.

Fig. 44.

Si S'I' est un rayon incident, il se réfléchit suivant I'F'. Du point K, intersection de ces deux rayons réfléchis IF, I'F', abaissons la perpendiculaire KO sur l'axe principal. Je dis que le point O est le même pour tous les rayons parallèles à l'axe.

En effet, il résulte de la construction que les deux triangles rectangles IAF, KOF sont semblables et donnent l'égalité de rapports

$$\frac{IA}{KO} = \frac{AF}{OF}.$$

Les deux autres triangles I'A'F', KOF' sont aussi sem-

blables et fournissent pareillement

$$\frac{I'A' \text{ ou } IA}{KO} = \frac{A'F'}{OF'},$$

et par suite

$$\frac{AF}{OF} = \frac{A'F'}{OF'},$$

d'où

$$\frac{AF - OF}{A'F - OF'} = \frac{AO}{A'O} = \frac{AF}{A'F'} = \frac{f}{f'}.$$

Ainsi, le point O partage la distance ($d = AA'$) des deux miroirs en deux parties respectivement proportionnelles aux longueurs focales f et f' de ces miroirs. C'est donc un point fixe.

Actuellement, regardons la perpendiculaire KO comme une ligne lumineuse fixe, et, en particulier, cherchons l'image de K, d'abord dans le miroir A, puis dans le miroir A′. Le rayon KI prolongé passe par le foyer principal et, par conséquent, se réfléchit suivant IS, parallèle à l'axe principal; un autre rayon KV, parallèle à l'axe principal, se réfléchit suivant VF. L'image de K, vue dans le miroir A, est donc en H, au point d'intersection des prolongements de ces deux rayons réfléchis. Par une construction identique, on reconnaît que l'image de K, vue dans le miroir A′, est en H′, au point d'entrecroisement des prolongements géométriques des deux rayons réfléchis I′S′ et V′F′. Abaissons HR et H′R′, perpendiculaires sur l'axe principal; d'après la propriété des plans conjugués, HR est l'image de la ligne lumineuse KO dans le miroir A, et H′R′ l'image de la même droite dans le miroir A′. Ainsi, un faisceau de lumière incidente qui converge en H se convertit, après la première réflexion, en un faisceau de rayons qui convergent en K; leurs prolongements forment un second

cône qui diverge du point K et se réfléchit sur le second miroir en divergeant du point H′. Les points H et H′ sont donc images l'un de l'autre à travers l'ensemble du système réflecteur, et ils sont situés du même côté et à égale distance de l'axe. Si H est un point du rayon incident, H′ est un point du rayon correspondant définitivement réfléchi. Cette relation a lieu évidemment entre deux points quelconques pris sur les perpendiculaires HR et H′R′, du même côté et à la même distance de l'axe principal. Enfin, que l'on conçoive deux plans menés par R et R′ perpendiculairement à l'axe : il est clair que, pour raison de symétrie, ils seront percés, le premier par le rayon incident, le second par le rayon définitivement réfléchi, en deux points situés sur une même parallèle à l'axe principal.

Ces plans sont donc *plans principaux,* d'après la dénomination de Gauss ; HR est le *premier plan principal,* H′R′ le *second.* Chacun d'eux est l'image optique de l'autre ; ce sont même les deux seules images conjuguées qui aient la même grandeur et la même direction ; R est le *premier point principal,* R′ le *second.*

Quand on connaît la position des points principaux R et R′, il est facile de déterminer géométriquement la position des deux points focaux Φ et Φ′.

Soit (*fig.* 44) un rayon incident SI, parallèle à l'axe ; il se réfléchit suivant IF et rencontre en J′ le second miroir A′. Le point J′ appartient évidemment au rayon définitif ; d'ailleurs le rayon incident perce le second plan principal en H′, qui se trouve nécessairement aussi sur la direction du rayon deux fois réfléchi. Ce dernier est donc H′J′Φ′ ; Φ′ est le second point focal. On trouverait de la même manière le premier point focal Φ, en traçant HJΦ.

Pour déterminer les points principaux et focaux, il suffit de connaître, d'une part, les distances des points principaux aux pôles correspondants des miroirs, et, de l'autre, les distances mutuelles des points principaux et focaux, c'est-à-dire les longueurs focales RΦ et R$'\Phi'$.

Calculons d'abord les distances AR, A'R'. On peut remarquer que les points O et R sont conjugués par rapport au miroir A, et que l'on a, d'après *la formule classique des miroirs,* en tenant compte des conventions adoptées sur les signes,

$$\frac{1}{AO} - \frac{1}{AR} = \frac{1}{f},$$

d'où

$$AR = \frac{f.AO}{f - AO}.$$

De même O et R' sont conjugués par rapport au miroir A', et l'on a

$$A'R' = \frac{f'.A'O}{f' - A'O}.$$

Précédemment, on a trouvé

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{f}{f'},$$

avec la condition

$$AO + A'O = d;$$

on en déduit séparément

$$AO = \frac{d.f}{f+f'}, \quad A'O = \frac{d.f'}{f+f'},$$

d'où successivement

$$AR = d\frac{f}{f+f'-d}$$

et

$$A'R' = d\frac{f'}{f+f'-d}.$$

En second lieu, calculons les longueurs focales. Les deux triangles rectangles semblables HRΦ, JAΦ donnent

$$\frac{HR}{JA} = \frac{R\Phi}{A\Phi}.$$

Les deux autres triangles semblables I′A′F′ et JAF′ donnent pareillement

$$\frac{I'A' \text{ ou } HR}{JA} = \frac{A'F'}{AF'},$$

d'où

$$\frac{R\Phi}{A\Phi} = \frac{A'F'}{AF'}$$

et

$$\frac{R\Phi}{R\Phi - A\Phi} = \frac{A'F'}{A'F' - AF'}$$

ou

$$R\Phi = AR\,\frac{A'F'}{AA'}.$$

Substituant les valeurs convenues ou calculées dans le second membre, il vient, pour la distance focale $R\Phi = \varphi$,

$$\varphi = \frac{ff'}{f + f' - d}.$$

On trouverait de même, pour $R'\Phi' = \varphi'$,

$$\varphi' = \frac{ff'}{f + f' - d}.$$

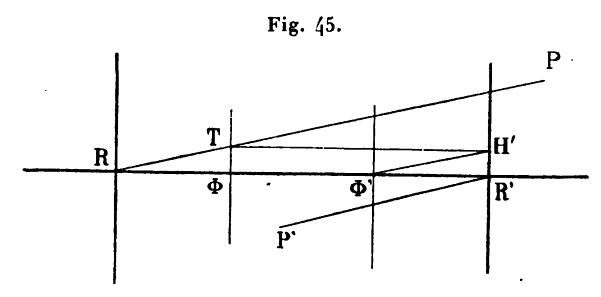
Les deux distances focales sont égales, absolument comme dans le cas de l'association de lentilles placées dans l'air ou dans un même milieu transparent.

Points nodaux. — Dans le cas d'un seul miroir, nous avons vu qu'un rayon passant par le centre de courbure ne subissait

pas de déviation : cela nous donnait immédiatement la direction d'un rayon réfléchi, et il suffisait d'en tracer un second pour déterminer l'image d'un point. Dans le cas de l'association de miroirs, on ne peut avoir un point unique doué de la même propriété; mais il est facile de constater que les deux points principaux R et R′ jouent un rôle analogue et sont, en conséquence, des points nodaux. Effectivement, tout rayon dirigé vers le premier point principal donne, après la dernière réflexion, un rayon qui passe par le deuxième et est parallèle au rayon incident.

Soient Φ et Φ′, R et R′ les *éléments cardinaux* du système, c'est-à-dire les deux plans focaux et les deux plans principaux (*fig.* 45). Considérons un rayon quelconque PR passant

Fig. 45.



par le premier point principal R : je dis que son conjugué P′R′ lui sera parallèle. En effet, PR perce le premier plan focal Φ en un point T qui, considéré comme un point lumineux, émet des rayons tous parallèles entre eux à la sortie des miroirs. L'un d'eux, TH′, parallèle à l'axe, se réfléchit en H′Φ′, passant par le second point focal Φ′ du système; donc P′R′ est parallèle à H′Φ′. Mais, à cause de l'égalité des distances focales, H′Φ′ est parallèle à PR, et il en est de même de P′R′, ce qu'il fallait démontrer.

Ces deux rayons PR, P′R′ portent le nom de *directrices*,

et, comme pour les lentilles, il y a à considérer la première et la seconde directrice.

En utilisant la propriété des points nodaux, on construit d'une manière élégante et rapide : 1° le conjugué d'un rayon incident quelconque; 2° l'image d'un point placé d'une manière quelconque.

La construction est identique à celle que nous avons indiquée pour les lentilles.

Le système de deux surfaces sphériques réfléchissantes peut donc être remplacé par un système composé de :

1° 4 *points,* savoir :

2 points *principaux* ou *nodaux,*

2 points *focaux;*

2° 4 *plans,* perpendiculaires à l'axe commun, qui comprennent :

2 plans *principaux,*

2 plans *focaux.*

Les équations qui se rapportent soit aux points conjugués, soit aux images, sont identiques à celles que nous avons obtenues pour les lentilles simples ou associées, placées dans l'air. On a :

Formule transformée,

$$\frac{f}{p} + \frac{f}{p'} = 1;$$

Formule simplifiée,

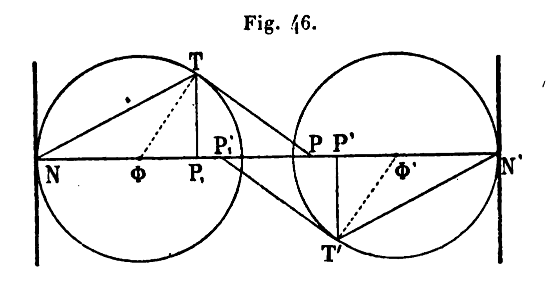
$$ll' = f^2.$$

Il résulte de cette dernière formule une construction très simple des images fournies soit par un système de lentilles, soit par un système de miroirs.

Soient N, N′, Φ, Φ′ les éléments cardinaux du système (lentilles ou miroirs). De chacun des foyers comme centre, avec

un rayon égal à f, décrivons un cercle tangent au plan principal correspondant. Ces deux cercles focaux pourront se couper ou ne pas se couper; la construction est générale (*fig.* 46). Il y a deux cas à considérer :

Fig. 46.



1° Le *point lumineux* est extérieur au cercle focal du miroir sur lequel s'effectue la première réflexion.

2° Le point lumineux est intérieur à ce cercle.

Si le point lumineux est extérieur, menons une tangente PT et traçons la première directrice TN; puis, par le second point nodal N', menons la seconde directrice N'T', et projetons T' en P'; P' est le conjugué de P.

En effet, dans le triangle rectangle PΦT, on a

$$f^2 = P\Phi \, . \, P_1\Phi = P\Phi \, . \, P'\Phi' = ll'.$$

Si le point lumineux est intérieur au cercle focal F, en P_1 par exemple, on effectuera la construction en sens inverse; on élèvera P_1T, on tracera la première directrice TN, puis la seconde T'N', et enfin la tangente $T'P'_1$; P'_1 sera l'image de P_1.

Si le premier miroir atteint par le rayon est celui de droite, on commencera les constructions par le cercle focal Φ'.

Nous allons maintenant examiner trois associations particulières de miroirs qui répondent à trois cas de la pratique,

le télescope de Newton, le télescope de Grégori et le télescope de Cassegrain.

Auparavant, rappelons les formules qui définissent les éléments cardinaux.

Longueur focale :

$$\varphi = \frac{ff'}{f+f'-d}$$

ou, plus explicitement,

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{RR'}{(R+R')-2d},$$

R et R′ désignant les rayons de courbure des deux miroirs.

Distances du premier et du second plan principal au premier et au second miroir :

$$h_1 = d\frac{f}{f+f'-d},$$

$$h_2 = d\frac{f'}{f+f'-d}$$

ou, plus explicitement,

$$h_1 = d\frac{R}{R+R'-2d},$$

$$h_2 = d\frac{R'}{R+R'-2d}.$$

Distance mutuelle Δ des plans principaux, c'est-à-dire $h_1 + h_2 + d$:

$$\Delta = 2d\frac{R+R'-d}{R+R'-2d}.$$

CHAPITRE VII.

INSTRUMENTS D'OPTIQUE FONDÉS SUR DES ASSOCIATIONS DE MIROIRS.

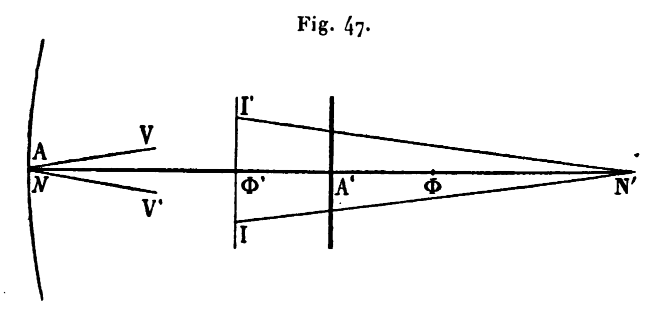
I. — *Télescope de Newton.*

L'objectif du télescope de Newton est formé par l'association de deux miroirs, l'un concave, l'autre plan, placés à une distance l'un de l'autre inférieure à la distance focale du premier miroir. Dans ce cas, il faut faire $f' = \infty$ dans nos formules, ce qui donne

$$\varphi = f, \quad h_1 = 0, \quad h_2 = d, \quad \Delta = 2d.$$

Ainsi, le premier point principal coïncide avec le sommet

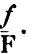
Fig. 47.



du miroir concave; le second point principal (*fig.* 47) est en arrière et à une distance d du miroir plan. Le premier point focal coïncide avec le foyer principal du miroir concave; le second est en avant et à une distance $f - d$ du miroir plan.

Les télescopes étant des instruments appropriés à la vision

d'objets infiniment éloignés, tels que les astres, la construction de l'image se simplifie notablement. Traçons les deux directrices NV, NV′, qui par leur angle VNV′ définissent le diamètre apparent de l'objet, puis les deux directrices correspondantes. Ces dernières rencontrent le second plan focal en I et en I′; II′ est l'image cherchée. Cette image, rendue horizontale par une inclinaison de 45° attribuée au miroir plan, est ensuite contemplée avec un oculaire simple de longueur focale F. Si cet oculaire est ajusté pour un œil doué d'une distance infinie de vision distincte, on aura le grossissement angulaire *vraiment spécifique* du système en comparant le diamètre apparent de l'objet à travers l'instrument au diamètre apparent de ce même objet à l'œil nu. Le grossissement G sera donné par le rapport

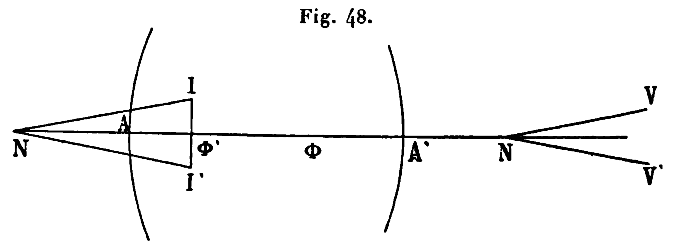


$$\frac{f}{F}.$$

II. — *Télescope de Grégori.*

L'objectif du télescope de Grégori est formé par l'association de deux miroirs A et A′, tous deux concaves vers les rayons

Fig. 48.



incidents (*fig.* 48). La somme des longueurs focales f et f' est inférieure à leur distance mutuelle d; il en résulte pour φ, h_1, h_2 des valeurs négatives. Le premier point principal est donc en N, à droite du miroir A, et le second point principal en N′, à

gauche du miroir A′; de plus, ces deux points nodaux sont tous deux situés en dehors des miroirs. Enfin, le premier point focal Φ est à gauche du premier point nodal N et le second point focal Φ′ à droite du second point nodal N′. Soit VNV′ le diamètre apparent de l'objet; on mènera les directrices correspondantes N′I et N′I′ jusqu'à la rencontre du second plan focal en I et en I′; on obtiendra en II′ une image droite, dont le diamètre apparent sera

$$\frac{\mathrm{II}'}{\varphi}.$$

Supposons que l'on regarde cette image ainsi préparée à travers un oculaire de distance focale F et avec un œil infiniment presbyte; on la verra sous un diamètre apparent égal à

$$\frac{\mathrm{II}'}{\mathrm{F}}.$$

Conformément à la définition, le grossissement G du système a pour valeur

$$\frac{\varphi}{\mathrm{F}}.$$

Mais on a trouvé plus haut, dans le cas le plus général,

$$\varphi = \frac{ff'}{f+f'-d},$$

ou, si δ est la distance des foyers des deux miroirs conjugués,

$$\varphi = -\frac{ff'}{\delta}.$$

Le grossissement s'exprimera donc par la formule très simple

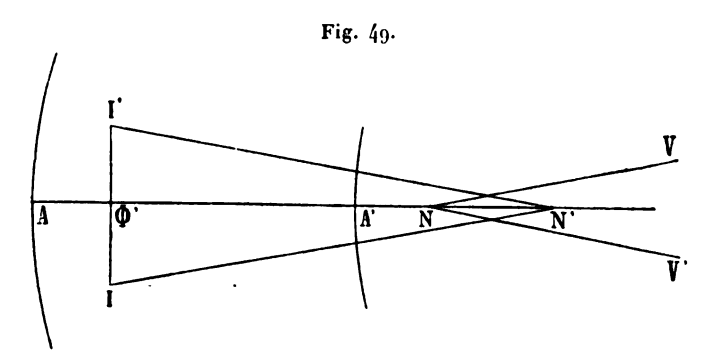
$$\mathrm{G} = -\frac{ff'}{\delta \mathrm{F}} = -\frac{\mathrm{RR}'}{4\delta \mathrm{F}},$$

R et R′ étant les rayons de courbure de ces miroirs.

III. — *Télescope de Cassegrain.*

Le télescope de Cassegrain est formé par l'association de deux miroirs, l'un concave A, l'autre convexe A'. Le foyer du miroir convexe est au delà de celui du miroir concave (*fig.* 49).

Fig. 49.



Pour trouver la place des éléments cardinaux, il faut changer f' en $-f'$ dans nos formules. Alors h_1 est négatif, h_2 et φ sont positifs; le premier point principal est en N, à droite du miroir A, et le second point principal en N', également à droite du miroir A; de plus, ces deux points nodaux sont tous deux situés en dehors et d'un même côté des miroirs. Enfin, le premier point focal Φ est à droite du premier point nodal N, et le second point focal Φ' à gauche du second point nodal N'.

Il en résulte évidemment que l'image est renversée. Le grossissement spécifique angulaire est donné par une formule identique (sauf le signe) à celle que nous avons trouvée pour le télescope de Grégori :

$$G = \frac{RR'}{4\delta}.$$

Remarque.

D'après les conventions adoptées sur le sens des longueurs positives, le signe +, dans l'expression du grossissement, indique que l'image est renversée, et le signe — qu'elle est droite.

Association de lentilles et de miroirs.

Puisque l'on sait associer soit un système de lentilles, soit un système de miroirs, et qu'il a été démontré que les éléments cardinaux d'un système réfléchissant sont identiques à ceux d'un système réfringent, il n'y a aucune difficulté à conjuguer simultanément miroirs et lentilles. La construction géométrique qui fournira les éléments cardinaux du système résultant est sous les yeux du lecteur et n'a pas besoin d'explication.

Quant aux longueurs focales φ, φ' du système, aux distances h_1 et h_2, on les obtiendra aisément par la méthode de calcul que nous avons employée plusieurs fois. Si l'on désigne par f_1 et f_2 la première et la seconde distance focale du système réfringent, et par R le rayon de courbure du miroir, on trouve

$$\varphi = \frac{f_1 \frac{R}{2}}{f_2 + \frac{R}{2} - d}, \quad h_1 = d \frac{f_1}{f_2 + \frac{R}{2} - d},$$

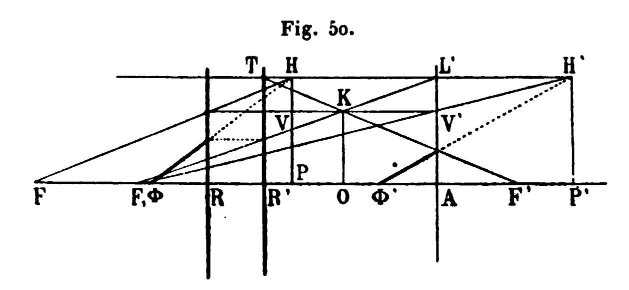
$$\varphi' = \frac{f_2 \frac{R}{2}}{f_2 + \frac{R}{2} - d}, \quad h_2 = d \frac{\frac{R}{2}}{f_2 + \frac{R}{2} - d}.$$

Cette recherche n'est pas une pure spéculation; elle s'est présentée à Helmholtz, dans l'étude physique de l'œil, lorsque

l'on cherche le lieu et la grandeur des images produites par les rayons lumineux qui se réfléchissent sur l'une des deux faces du cristallin, après avoir traversé le système réfringent constitué par la cornée et l'humeur aqueuse.

Dans la production des images de Purkinje, les rayons définitifs qui arrivent à l'œil de l'observateur ont à repasser par

Fig. 50.



le système réfringent, en sorte que le système tout entier comprend deux systèmes réfringents, séparés par un système réfléchissant par rapport auquel ils sont symétriques.

Pour achever la solution du problème, il faut donc conjuguer le système résultant que nous venons d'obtenir avec le premier système composant, ce qui ne présente aucune difficulté, et pourtant il ne faut pas oublier de remarquer que, à cause de la marche réciproque des rayons, il y a interversion dans le rang des points principaux du système résultant : le second plan principal doit être pris pour le premier dans la nouvelle association.

La distance focale du système définitif est donnée par la formule

$$\psi = \frac{f_1 \varphi'}{f_2 + \varphi' - d},$$

$$\psi' = \frac{f_2 \varphi}{f_2 + \varphi' - d_1},$$

en posant

$$d_1 = d + h_2.$$

On déduit d'abord, à l'aide des formules antérieures,

$$d_1 = d\,\frac{f_2 + R - d}{f_2 + \frac{R}{2} - d},$$

puis

$$\psi = \frac{f_1 f_2 R}{2(f_2 - d)(f_2 + R - d)} = \psi'.$$

Les deux distances focales sont égales dans le système définitif. Quand cette longueur commune sera positive, elle sera portée à *gauche* du premier plan principal; au contraire, prise négativement, elle sera comptée à *droite* du premier plan principal et à gauche du second (¹).

(¹) *Optique physiologique de Helmholtz*, p. 156.

FIN.

6449. PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

